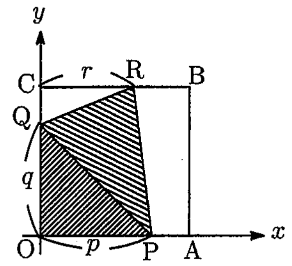
第 1 問

(1)　P, Q, R がそれぞれ辺 OA, OC, BC 上（両端点を含む）にあるための条件は，

$$0 \leqq p \leqq 1,\quad 0 \leqq q \leqq 1,\quad 0 \leqq r \leqq 1.$$



まず，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = \frac{1}{2}pq$$

であり，これが $\frac{1}{3}$ に等しいことから，

$$pq = \frac{2}{3}. \qquad \cdots①$$

また，三角形 PQR の面積は

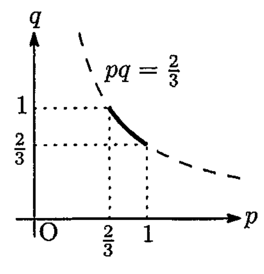
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR} &= (\text{台形 OPRC の面積}) - \triangle\mathrm{OPQ} - \triangle\mathrm{CQR}\\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{OP}+\mathrm{CR})\cdot\mathrm{OC} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{CQ}\cdot\mathrm{CR}\\ &= \frac{1}{2}(p+r)\cdot 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1-q)r\\ &= \frac{1}{2}(p+qr) - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり，これが $\frac{1}{3}$ に等しいことから，

$$p + qr = \frac{4}{3}. \qquad \cdots②$$

①と $0 \leqq p \leqq 1$, $0 \leqq q \leqq 1$ を満たす p, q のとりうる値の範囲は，双曲線 $pq = \frac{2}{3}$ を考え，

$$\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1,\quad \frac{2}{3} \leqq q \leqq 1.$$

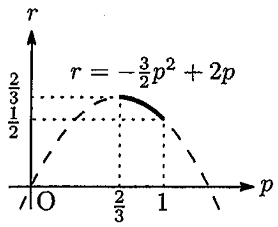


第１問(つづき)

また，①より $q=\dfrac{2}{3p}$ であり，これと②より，

$$p+\frac{2}{3p}\cdot r=\frac{4}{3},\ \text{すなわち}\ r=2p-\frac{3}{2}p^2=-\frac{3}{2}\left(p-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

であり，p が $\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$ の範囲を動くとき，r は $\dfrac{1}{2}\leqq r\leqq\dfrac{2}{3}$ の範囲を動く．このとき $0\leqq r\leqq 1$ を満たす．



以上により，q, r を p を用いて表すと，

$$q=\frac{2}{3p},\quad r=2p-\frac{3}{2}p^2 \qquad \cdots(答)$$

であり，p, q, r それぞれのとりうる値の範囲は

$$\frac{2}{3}\leqq p\leqq 1,\quad \frac{2}{3}\leqq q\leqq 1,\quad \frac{1}{2}\leqq r\leqq\frac{2}{3}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　(1) の条件下で

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}=\frac{r}{q}=\frac{3p}{2}\left(2p-\frac{3}{2}p^2\right)=-\frac{9}{4}p^3+3p^2$$

と表すことができる．

$$f(p)=-\frac{9}{4}p^3+3p^2$$

とおくと，

$$f'(p)=-\frac{27}{4}p\left(p-\frac{8}{9}\right)$$

より，$\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$ における $f(p)$ の増減は次の通り．

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{3}{4}$

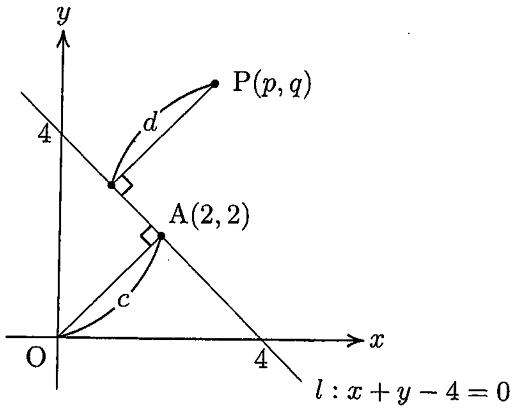
したがって，$\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の

$$\text{最大値は}\ \frac{64}{81},\quad \text{最小値は}\ \frac{2}{3} \qquad \cdots(答)$$

である．

第2問

(1)



条件 1 より,

$$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17.$$

$$8 \leqq 2p + 2q \leqq 17.$$

$$4 \leqq p + q \leqq \frac{17}{2}.$$

$$-p + 4 \leqq q \leqq -p + \frac{17}{2}. \qquad \cdots ①$$

① より, $p + q - 4 \geqq 0$ であることに注意して,

$$c = 2\sqrt{2}, \quad d = \frac{|p + q - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{p + q - 4}{\sqrt{2}}.$$

したがって, 条件 ② より,

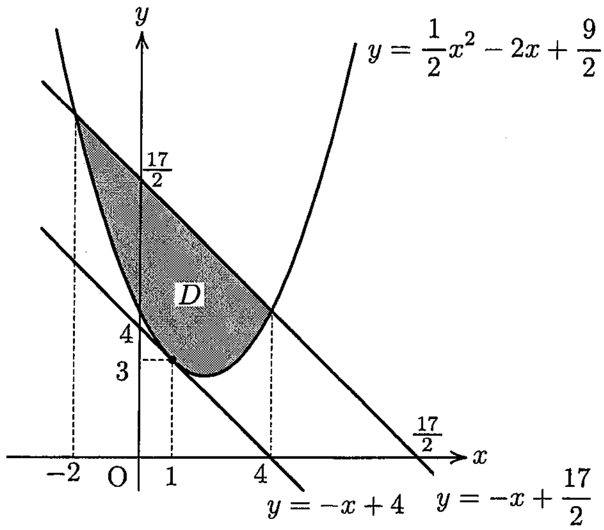
$$cd \geqq (p-1)^2.$$

$$2(p + q - 4) \geqq (p-1)^2.$$

$$q \geqq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2} \left(= \frac{1}{2}(p-2)^2 + \frac{5}{2} \right). \qquad \cdots ②$$

① かつ ② を満たす点 (p, q) の全体が D であり, それを図示すると次図の灰色部分 (境界含む) となる. ただし, 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$ は直線 $y = -x + 4$ と点 $(1, 3)$ において接している.

第 2 問 (つづき 1)



$\cdots$(答)

また,

$$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}=-x+\frac{17}{2}$$

とすると,

$$x=-2,4$$

であるから, D の面積は,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}\left\{\left(-x+\frac{17}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx &= \int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{1}{6}(4+2)^3\right\}\\ &= 18.\end{aligned}$$

$\cdots$(答)

(2) まず, 直線 $y=kx$ と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}$ が接するときの k の値とそのときの接点の x 座標を求める. 連立して y を消去して,

$$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}=kx.$$

$$x^2-2(k+2)x+9=0.$$

(判別式)/4 $=(k+2)^2-9=0$ として,

$$k=1,-5.$$

$k=1$ のとき, $x=3$(重解),　$k=-5$ のとき, $x=-3$(重解).

第 2 問 (つづき 2)

これより，直線 $y=x$ と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}$ の接点は D に属するが，直線 $y=-5x$ と放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}$ の接点は D に属さない．

下の図より，P が D 上を動くとき，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角 θ は，$0<\theta<\pi$ の範囲にあり，この範囲で $\cos\theta$ は θ について単調減少である．

よって，$\cos\theta$ が最大，つまり θ が最小となるのは，直線 OP の傾きが 1 のときであり，このとき，

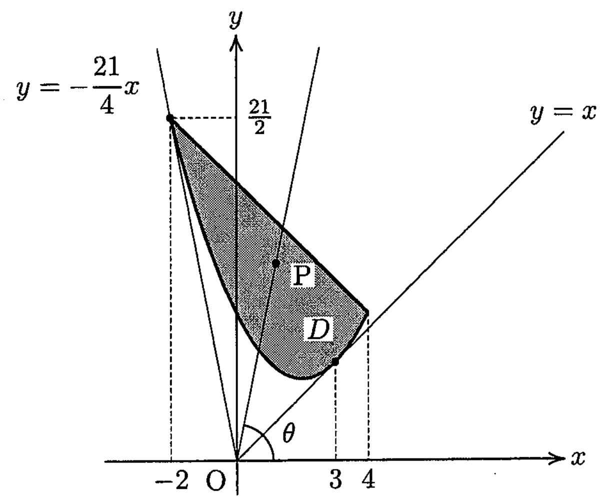
$$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

また，$\cos\theta$ が最小，つまり θ が最大となるのは，直線 OP が点 $\left(-2,\ \frac{21}{2}\right)$ を通るときで，このとき，

$$\tan\theta=-\frac{21}{4}\ (0<\theta<\pi)\ より，\cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{457}}.$$

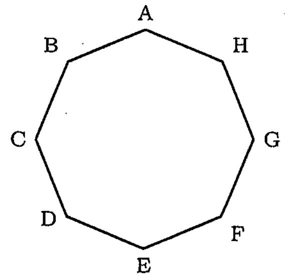
以上より，$\cos\theta$ のとりうる値の範囲は，

$$-\frac{4}{\sqrt{457}}\leqq\cos\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \cdots(答)$$



第 3 問

(1)　10 回操作を行ったとき，点 P は正八角形上を 2 周以上はしないから，点 P が点 A に達するのは，



- (ア)　点 A に達するまでに反時計回りに 1 周している，
- (イ)　点 A に達するまでに時計回りに 1 周している，
- (ウ)　点 A に達するまでに 1 周もしない

のいずれかである．

10 回の操作のうち，表が m 回，裏が n 回（m，n は 0 以上の整数）だけ出るとすると，

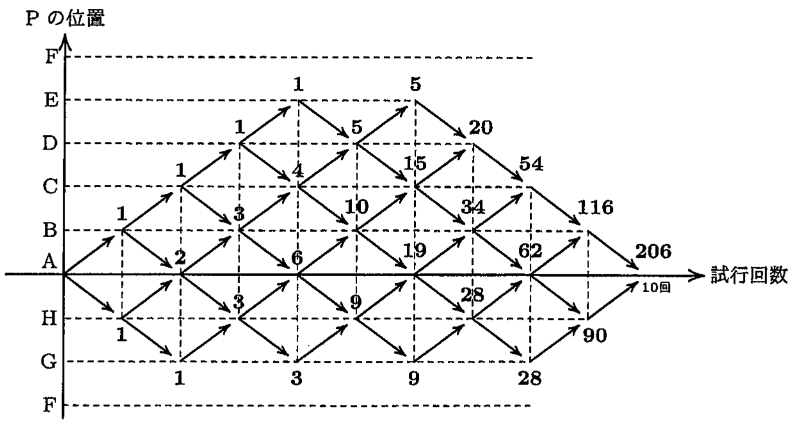
$m+n=10$　　$\cdots$①　　であり，

- (ア)のとき，　$m-n=8$　　$\cdots$②　であるから，　①かつ②より，　$(m,\ n)=(9,\ 1)$，
- (イ)のとき，　$m-n=-8$　$\cdots$③　であるから，　①かつ③より，　$(m,\ n)=(1,\ 9)$，
- (ウ)のとき，　$m-n=0$　　$\cdots$④　であるから，　①かつ④より，　$(m,\ n)=(5,\ 5)$．

よって，求める確率は，

$$P(S)={}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{272}{2^{10}}=\mathbf{\frac{17}{64}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$S\cap\overline{T}$ を考えると，(1) における (ア) と (イ) の場合はすべて点 F を通るから，$S\cap\overline{T}$ は (ウ) において点 F を通らない事象である．このようなコインの出方を，次のような経路を用いて考える．
（図中の数字は，その点に至るまでの最短経路数を表す．）



上の図より，点 F を通らないコインの出方は 206 通りであるから，

$$P(S\cap\overline{T})=\frac{206}{2^{10}}=\frac{103}{512}.$$

よって，求める確率は，

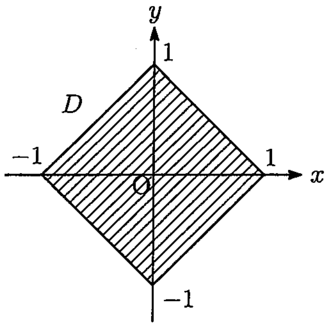
$$P(S\cap T)=P(S)-P(S\cap\overline{T})=\frac{17}{64}-\frac{103}{512}=\mathbf{\frac{33}{512}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第4問

(1)　$|x|+|y| \leqq 1$ より，

$$\begin{cases} x+y \leqq 1 & \text{すなわち，} y \leqq -x+1 \quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0 \text{のとき}), \\ -x+y \leqq 1 & \text{すなわち，} y \leqq x+1 \quad (x < 0,\ y \geqq 0 \text{のとき}), \\ x-y \leqq 1 & \text{すなわち，} y \geqq x-1 \quad (x \geqq 0,\ y < 0 \text{のとき}), \\ -x-y \leqq 1 & \text{すなわち，} y \geqq -x-1 \quad (x < 0,\ y < 0 \text{のとき}). \end{cases}$$

よって，D は次の図の斜線部分のようになる（境界含む）．

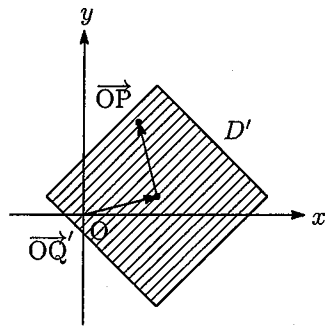


……(答)

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくと

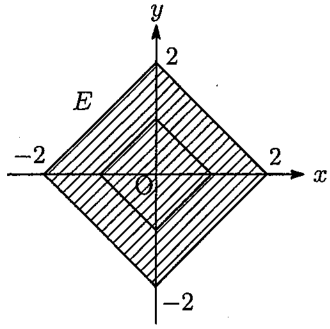
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

となるから，まず点 Q′ を固定して点 P が領域 D を動くときに点 R が動く範囲を求めると，それは D を $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ だけ平行移動して得られる領域になる（この領域を D' とする）．



一方，D は原点について対称な領域であり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で定まる点 Q′ は原点について点 Q と対称であるから，Q′ が動く範囲も D 自身になる．

以上より，E は Q′ が D 全体を動くときの，D' が通過しうる領域であるから，次の図の斜線部分のようになる（境界含む）．



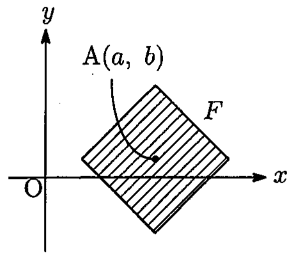
……(答)

第4問（つづき）

(2)　不等式

$$|x-a|+|y-b| \leqq 1$$

が表す領域は，点 $(x-a,\ y-b)$ が領域 D を動くような点 $(x,\ y)$ 全体であるから，F は D を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる領域である．



よって，$\mathrm{A}(a,\ b)$ とおけば，関係式

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

によって領域 D の任意の点P，Qと領域 F の任意の点S，Tは1対1に対応し，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

となるから，点Uが動く範囲 G は点Rが動く範囲 E と一致することが分かる．　（証明終り）

【別解】

$\mathrm{S}(X_1,\ Y_1)$，$\mathrm{T}(X_2,\ Y_2)$ とおくと，S，Tは領域 F を動くので

$$\begin{cases} |X_1-a|+|Y_1-b| \leqq 1\ , \\ |X_2-a|+|Y_2-b| \leqq 1\ . \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(X_1,\ Y_1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(X_2,\ Y_2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(X_1-X_2,\ Y_1-Y_2)$$

となるから，$\mathrm{U}(x,\ y)$ とおけば，

$$\begin{cases} x=X_1-X_2\ , \\ y=Y_1-Y_2\ . \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

よって，

$$\begin{cases} x_1=X_1-a\ ,\ y_1=Y_1-b\ , \\ x_2=X_2-a\ ,\ y_2=Y_2-b \end{cases}$$

とおけば，①，②は

$$\begin{cases} |x_1|+|y_1| \leqq 1\ , \\ |x_2|+|y_2| \leqq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(X_1-a)-(X_2-a)=x_1-x_2\ , \\ y=(Y_1-b)-(Y_2-b)=y_1-y_2 \end{cases}$$

と変形できるので，これは点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ が領域 D を動くときの，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点Uが動く範囲が G であることを表すので，G は E と一致する．　（証明終り）