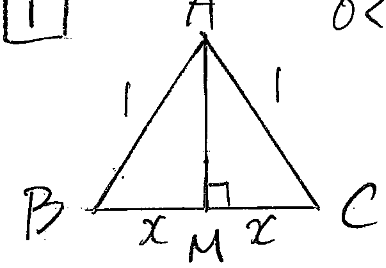
$\boxed{1}$ $0<x<1$



$AB=AC=1$，$BC=2x$

とし，BCの中点をMとする．

$$AM=\sqrt{1-x^2}$$

であるから，

$$\triangle ABC=\frac{1+1+2x}{2}r$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{1-x^2}=(1+x)r$$

$$r=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin A$$

$$\frac{1}{2}2x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\sin A$$

より

$$\sin A=2x\sqrt{1-x^2}$$

正弦定理より

$$BC=2R\sin A$$

であるから，

$$2x=2R\cdot 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$R=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $\dfrac{r}{R}=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}\cdot 2\sqrt{1-x^2}$

$$=2\,\frac{x(1-x^2)}{1+x}$$

$$=2x(1-x)$$

$$=-2x^2+2x$$

$$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$x=\frac{1}{2}$のとき，$\frac{r}{R}$は

最大値$\frac{1}{2}$をとる．

注 内心をIとすると，

$AI:IM=AB:BM=1:x$

$$r=IM=\frac{x}{1+x}\sqrt{1-x^2}$$

$\angle BAM=\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$とおくと

$\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$であり

$$R\cos\theta=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ $x_1=a>0$, $x_2=b>0$

(1) $x_3=\dfrac{1+x_2}{x_1}=\dfrac{1+b}{a}$

$x_4=\dfrac{1+x_3}{x_2}=\dfrac{1+\frac{1+b}{a}}{b}$

$=\dfrac{1+a+b}{ab}$

$x_5=\dfrac{1+x_4}{x_3}=\dfrac{1+\frac{1+a+b}{ab}}{\frac{1+b}{a}}$

$=\dfrac{1+a+b+ab}{b(1+b)}$

$=\dfrac{(1+a)(1+b)}{b(1+b)}$

$=\dfrac{1+a}{b}$

$x_6=\dfrac{1+x_5}{x_4}=\dfrac{1+\frac{1+a}{b}}{\frac{1+a+b}{ab}}$

$=\dfrac{a(1+a+b)}{1+a+b}$

$=a$

$x_7=\dfrac{1+x_6}{x_5}=\dfrac{1+a}{\frac{1+a}{b}}$

$=b$

(2) $x_1=x_6=2$,

$x_2=x_7=b$

であるから，以下は繰り返しとなり，

$$\begin{cases} x_{5k+1}=2, \\ x_{5k+2}=b, \\ x_{5k+3}=\dfrac{b+1}{2}, \\ x_{5k+4}=\dfrac{b+3}{2b}, \\ x_{5k+5}=\dfrac{3}{b} \end{cases}$$

$(k=0, 1, 2, \cdots)$ である．

$\dfrac{3}{b}$ が自然数であるから

$b=1, 3$ である．

(i) $b=1$ のとき

$\dfrac{b+1}{2}=1$, $\dfrac{b+3}{2b}=2$

となり適する．

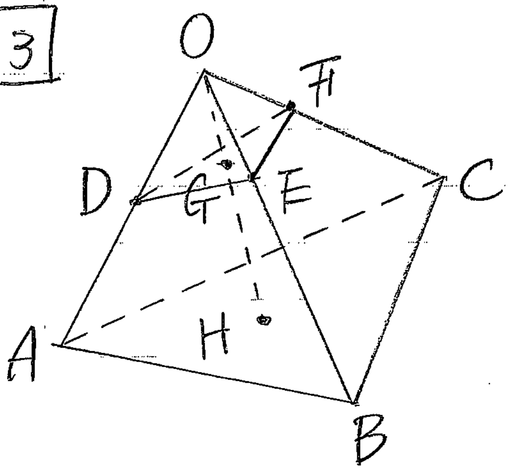
(ii) $b=3$ のとき

$\dfrac{b+1}{2}=2$, $\dfrac{b+3}{2b}=1$

となり適する．

(i), (ii) より，$b=1, 3$

$\boxed{3}$



(1) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

であるから,

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{3}$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OC}$$

(2) $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}\ (k>1)$

とおける.

$$\overrightarrow{OH}=\frac{k}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{12}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{12}\overrightarrow{OC}$$

であり, Hは平面ABC上にあるから, $\frac{k}{6}+\frac{k}{12}+\frac{k}{12}=1$

$$k=3$$

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

BCの中点をMとすると

$OM=AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である.

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$$

$$=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}}{2}$$

HはAMの中点である

$$AH=\frac{1}{2}AM=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(別) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

とおくと, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}$$

であるから

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{4}$$

$$|\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}|^2$$
$$=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+4|\vec{a}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$-4\vec{c}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$=3$

であるから

$$|\vec{e}+\vec{c}-2\vec{a}|=\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{AH}|=\frac{1}{4}|\vec{e}+\vec{c}-2\vec{a}|$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

である．

$\boxed{4}$

(1) $2x^2+4x+3=-2ax-a^2$

より,

$$2x^2+2(a+2)x+a^2+3=0 \quad \cdots\cdots①$$

CとLが異なる2点で交わることから①は異なる2実数解をもつ

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-2(a^2+3)>0$$

$$-a^2+4a-2>0$$

$$a^2-4a+2<0$$

$$2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$$

(2) ①の2解をα, β $(\alpha<\beta)$ とする.

$$x=\frac{-(a+2)\pm\sqrt{-a^2+4a-2}}{2}$$

より,

$$\beta-\alpha=\sqrt{-a^2+4a-2}$$

である.

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2ax-a^2-(2x^2+4x+3)\right\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-2\times\left\{-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(-a^2+4a-2\right)^{\frac{3}{2}}$$

ここで,

$$-a^2+4a-2$$

$$=-(a-2)^2+2$$

であるから, $a=2$ のとき

Sは最大値 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる