1

B＼A	グ	チ	パ
グ	分	B	A
チ	A	分	B
パ	B	A	分

1回のじゃんけんにつき，Aが勝つ，負ける，あいこの~~確率~~は $\frac{1}{3}$ ずつである

n回のうちAがx回勝ち，y回負け，z回あいこであるとすると，

$$\begin{cases} x+y+z=n, \\ 2x+z \quad =a_n \end{cases}$$

となる．

(1) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x+z \quad =3 \end{cases}$

であるから，

$x=y=0, 1$ である．

(i) $x=y=0$，$z=3$ のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

(ii) $x=y=z=1$ のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 3!=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

(i)，(ii) 合せて，$a_3=3$ となる~~確率~~は，$\frac{7}{27}$

(2) $\begin{cases} x+y+z=5, \\ 2x+z \quad =5 \end{cases}$

であるから

$x=y=0, 1, 2$ である．

(i) $x=y=0$，$z=5$ のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

(ii) $x=y=1$，$z=3$ のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{5!}{1!1!3!}=\frac{20}{243}$$

(iii) $x=y=2$，$z=1$ のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{5!}{2!2!1!}=\frac{30}{243}$$

(i), (ii), (iii) 合せて，$a_5=5$ となる確率は，$\dfrac{51}{243}=\dfrac{17}{81}$

(3) AとBは条件が対等である．

$a_5+b_5=10$ であり

$a_5=b_5=5$ となる確率は (2) である．

$a_5 \neq b_5$ となる確率は

$$1-\frac{17}{81}=\frac{64}{81}$$

$a_5>b_5$，$a_5<b_5$ となる確率は，いずれも

$$\frac{64}{81}\times\frac{1}{2}=\frac{32}{81}$$

である．したがって，$a_5 \geqq b_5$ となる確率は

$$\frac{17}{81}+\frac{32}{81}=\frac{49}{81}$$

(参考)

$a_5=10$ $(x=5,\ y=z=0)$

$\cdots\ \dfrac{1}{243}$

$a_5=9$ $(x=4,\ y=0,\ z=1)$

$\cdots\ \dfrac{5}{243}$

$a_5=8$ $(x=4,\ y=1,\ z=0$ と $x=3,\ y=0,\ z=2)$

$\cdots\ \dfrac{5+10}{243}$

$a_5=7$ $(x=3,\ y=1,\ z=1$ と $x=2,\ y=0,\ z=3)$

$\cdots\ \dfrac{20+10}{243}$

$a_5=6$ $(x=3,\ y=2,\ z=0$ と $x=2,\ y=1,\ z=2$ と $x=1,\ y=0,\ z=4)$

$\cdots\ \dfrac{10+30+5}{243}$

$a_5=5$ の場合も合せると

$$\frac{1+5+15+30+45+51}{243}=\frac{49}{81}$$

$\boxed{2}$ $x_1=a>0$, $x_2=b>0$

(1) $x_3=\dfrac{1+x_2}{x_1}=\dfrac{1+b}{a}$

$x_4=\dfrac{1+x_3}{x_2}=\dfrac{1+\frac{1+b}{a}}{b}$

$=\dfrac{1+a+b}{ab}$

$x_5=\dfrac{1+x_4}{x_3}=\dfrac{1+\frac{1+a+b}{ab}}{\frac{1+b}{a}}$

$=\dfrac{1+a+b+ab}{b(1+b)}$

$=\dfrac{(1+a)(1+b)}{b(1+b)}$

$=\dfrac{1+a}{b}$

$x_6=\dfrac{1+x_5}{x_4}=\dfrac{1+\frac{1+a}{b}}{\frac{1+a+b}{ab}}$

$=\dfrac{a(1+a+b)}{1+a+b}$

$=a$

$x_7=\dfrac{1+x_6}{x_5}=\dfrac{1+a}{\frac{1+a}{b}}$

$=b$

(2) $x_1=x_6=a$

$x_2=x_7=b$

であるから，以下は繰り返しとなり，

$$\begin{cases} x_{5k+1}=a, \\ x_{5k+2}=b, \\ x_{5k+3}=\dfrac{b+1}{a}, \\ x_{5k+4}=\dfrac{a+b+1}{ab}, \\ x_{5k+5}=\dfrac{a+1}{b}, \end{cases}$$

$(k=0, 1, 2, \cdots)$ である。

$\dfrac{b+1}{a}\geqq 1$, $\dfrac{a+1}{b}\geqq 1$

であることが必要である。

よって，

$a-1\leqq b\leqq a+1$

(i) $b=a+1$ のとき

$\dfrac{a+1}{b}=1$,

$\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{a+2}{a}=1+\dfrac{2}{a}$

これが自然数であるから，

$a=1, 2$

$a=1$ のとき $b=2$

$\dfrac{a+b+1}{ab}=2$ より適する

$a=2$ のとき $b=3$

$\dfrac{a+b+1}{ab}=1$ より適する

(ii) $b=a-1$ のとき

$a=b+1$ であり

(i) と同様に

$b=1, a=2$

$b=2, a=3$ は適する

(iii) $b=a$ のとき

$\dfrac{b+1}{a}=\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}$

これが自然数であるから，

$a=1, b=1$

$\dfrac{a+1}{b}=2, \dfrac{a+b+1}{ab}=3$

より，適する．

(i)〜(iii) より，

$(a, b)=(1,1), (1,2), (2,1),$
$(2,3), (3,2)$

$\boxed{3}$

(1) $u=z\overline{w}$ とおくと，

$\overline{u}=z\overline{w}$ である．

$u=\overline{u}$ より u は実数

$u=z\overline{w}=k$ (k は実数)

とおくと，$z\neq 0$ より

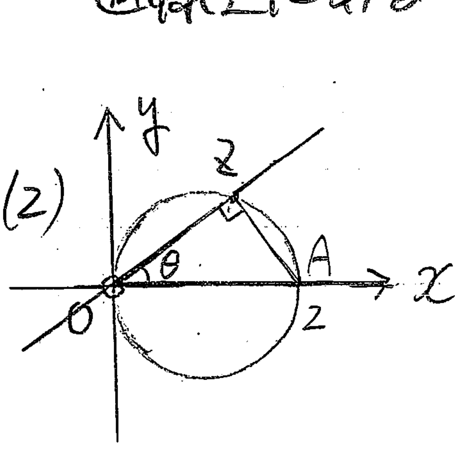
$$\overline{w}=\frac{k}{z}$$

$$w=\frac{k}{\overline{z}}=\frac{kz}{z\overline{z}}$$

$$w=\frac{k}{|z|^2}z$$

よって，$0, z, w$ は一直線上にある

(2)



A(2)，P(z)，Q(w) とする．

$z\neq 0$ より $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

としてよい．

OB $=2$ より

OP $=$ OB $\cos\theta=2\cos\theta$

$|z|=2\cos\theta$ であり

$z=2\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)$

(1) と PQ $=|z-w|=2$ より

$w=(2\cos\theta\pm 2)(\cos\theta+i\sin\theta)$

(3) $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$

w の虚部を y とおくと

$y=2(\cos\theta\pm 1)\sin\theta$

最大値を考えるので

$y=2(\cos\theta+1)\sin\theta$

としてよい

$$y' = 2\{-\sin^2\theta + (\cos\theta+1)\cos\theta\}$$

$$= 2\{\cos^2\theta - 1 + (\cos\theta+1)\cos\theta\}$$

$$= 2(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	(2)

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき y は最大値

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

（別解） $y^2 = 4(\cos\theta+1)^2\sin^2\theta$

$$= 4(1+\cos\theta)^3(1-\cos\theta)$$

$t = 1+\cos\theta$ とおくと，

$1 < t \leqq 2$ であり

$$y^2 = 4t^3(2-t)$$

$= f(t)$ とおくと

$$f'(t) = 24t^2 - 16t^3$$

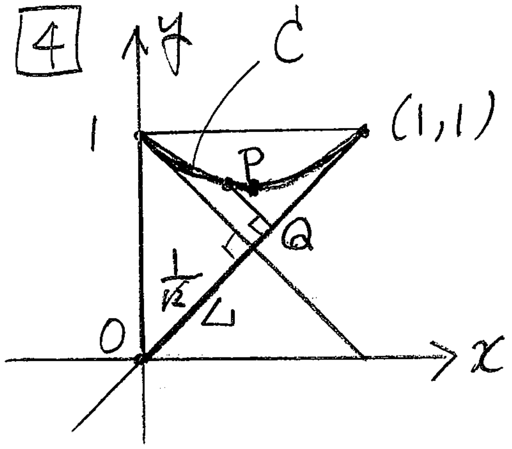
$$= -16t^2\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

t	(1)		$\frac{3}{2}$		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(4)	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	0

$t = \frac{3}{2}$ のとき y は最大値

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

$\boxed{4}$



(1) $P(t,\ t^2-t+1)$
$(0 \leqq t \leqq 1)$

直線PQ：$y=-(x-t)+t^2-t+1$

$y=-x+t^2+1$

$x=-x+t^2+1$ より

$x=\dfrac{t^2+1}{2}$

$Q\left(\dfrac{t^2+1}{2},\ \dfrac{t^2+1}{2}\right)$

$u=OQ=\dfrac{t^2+1}{\sqrt{2}}$

(2) $\overrightarrow{PQ}=\left(\dfrac{(t-1)^2}{2},\ -\dfrac{(t-1)^2}{2}\right)$

$PQ=\dfrac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$

(3) $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi$ とする

$V_2=\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\pi PQ^2\,du$ とする

$u=\dfrac{t^2+1}{\sqrt{2}}$ より

u	$\frac{1}{\sqrt{2}} \to \sqrt{2}$
t	$0 \to 1$

$du=\sqrt{2}t\,dt$

$V_2=\pi\displaystyle\int_0^1\dfrac{(t-1)^4}{2}\sqrt{2}t\,dt$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\left\{\left[\dfrac{(t-1)^5}{5}t\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1\dfrac{(t-1)^5}{5}dt\right\}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\left[-\dfrac{(t-1)^6}{30}\right]_0^1$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$

求める体積は

$V_1+V_2=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\pi$

注 Oのまわりに $-45°$ 回転すると，

$$x+yi=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\{t+(t^2-t+1)i\}$$

$$=\frac{t^2+1}{\sqrt{2}}+\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}i$$

$$x=\frac{t^2+1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$$

$$x=OQ=\frac{t^2+1}{\sqrt{2}}=u$$

$$y=PQ=\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$$