1

問1

$OP=\frac{1}{k}OQ$, $OP\cdot OQ=4$ より

$$OP\cdot OQ=\frac{1}{k}OQ^2=4.$$

$$k=\frac{OQ^2}{4}=\frac{c^2+d^2}{4}.\quad\cdots(答)$$

問2　問1より，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{c^2+d^2}\overrightarrow{OQ}.$$

$$(a,b)=\frac{4}{c^2+d^2}(c,d).$$

$2a+b-6=0$ より

$$\frac{8c}{c^2+d^2}+\frac{4d}{c^2+d^2}-6=0$$

$$8c+4d-6(c^2+d^2)=0$$

$$c^2+d^2-\frac{4}{3}c-\frac{2}{3}d=0\quad\cdots①$$

（ただし，$(c,d)\neq(0,0)$）

よって，円 C の方程式は，

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y=0.\quad\cdots(答)$$

問3

$2a+b-6=0$ かつ $0\leqq a\leqq 3$

より，① かつ $(c,d)\neq(0,0)$ のもとで

$$0\leqq\frac{4c}{c^2+d^2}\leqq 3.$$

$$0\leqq 4c\leqq 3(c^2+d^2).$$

$$c\geqq 0 \text{ かつ } \left(c-\frac{2}{3}\right)^2+d^2\geqq\frac{4}{9}.$$

以上より，Q の動く範囲は，

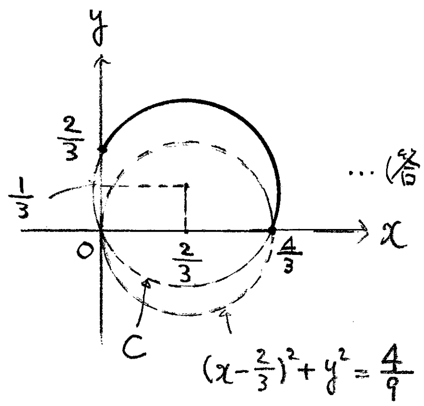
円 $C:\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

の O を除く部分のうち，

$$x\geqq 0 \text{ かつ } \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2\geqq\frac{4}{9}$$

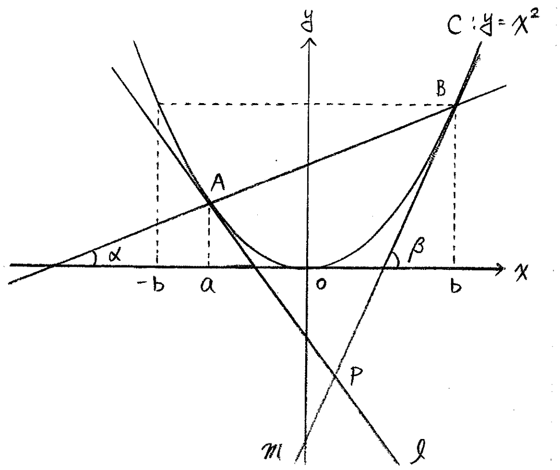
を満たす部分である．

図示すると，次の太線部．



…(答)

2



問1. $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ $(-b<a<0<b)$ より

直線ABの方程式は,

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)$$

すなわち,

$$y=(a+b)x-ab. \cdots(答)$$

$y=x^2$ に対して, $y'=2x$ より,

m の方程式は,

$$y-b^2=2b(x-b)$$

すなわち

$$y=2bx-b^2. \cdots(答)$$

問2. $a+b>0$, $2b>0$, 問1より,

$$\tan\alpha=a+b,\ \tan\beta=2b. \cdots ①$$

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$ より

$$\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}. \cdots ②$$

①, ②より

$$1=\frac{b-a}{1+2b(a+b)}$$

$$1+2b(a+b)=b-a$$

$$(2b+1)a=-(2b^2-b+1)$$

$$a=-\frac{2b^2-b+1}{2b+1}. \cdots ③ \cdots(答)$$

問3. $\angle BAP=\frac{\pi}{2}$ より, $l \perp AB$ であるから,

$$(l\text{の傾き})\cdot(AB\text{の傾き})=-1.$$

すなわち

$$2a(a+b)+1=0.$$

③より

$$2\left(-\frac{2b^2-b+1}{2b+1}\right)\cdot\frac{2b-1}{2b+1}+1=0.$$

$$2(2b^2-b+1)(2b-1)-(2b+1)^2=0.$$

$$8b^3-12b^2+2b-3=0.$$

$$(2b-3)(4b^2+1)=0.$$

$b>0$ より,

$$b=\frac{3}{2}.$$

③より

$$a=-1.$$

これらは $-b<a<0<b$ を満たす.

以上より, 求める a, b の値は,

$$a=-1,\ b=\frac{3}{2}. \cdots(答)$$

3

問1.

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(4,-2,-1)$.

$\vec{n}=(a,b,c)$とすると, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$より

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(1,1,-1)=0\\(a,b,c)\cdot(4,-2,-1)=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b-c=0 & \cdots ①\\4a-2b-c=0. & \cdots ②\end{cases}$$

②−①より

$3a-3b=0 \quad b=a.\cdots ③$

①より

$c=a+b=2a.\cdots ④$

$|\vec{n}|^2=1$であるから

$a^2+b^2+c^2=1.$

③④を代入して

$a^2+a^2+4a^2=1. \quad a=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$

以上より

$\vec{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2).\cdots$(答).

問2.

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}-s\overrightarrow{OA}$

$=-s(1,1,-1)+(1-t)(4k,-2k+2,-k+1)$

$\quad+t(4k+4,-2k,-k)$

$=(-s+4t+4k,-s-2t-2k+2,s-t-k+1).$

$\cdots$(答)

問3. $\overrightarrow{PQ}$が$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{BC}$の両方に垂直であるから,

$\overrightarrow{PQ}$と$\vec{n}$は平行であり,

$\overrightarrow{PQ}=l(1,1,2)$ (lは実数)

と表せる. 成分を比較して,

$$\begin{cases}-s+4t+4k=l. & \cdots ⑤\\-s-2t-2k+2=l. & \cdots ⑥\\s-t-k+1=2l. & \cdots ⑦\end{cases}$$

⑤−⑥より

$6t+6k-2=0$

$3t+3k-1=0.\cdots ⑧$

⑤×2−⑦より

$-3s+9t+9k-1=0.\cdots ⑨$

⑧より

$t+k=\frac{1}{3}, \quad t=-k+\frac{1}{3}.$

⑨より

$-3s+9\cdot\frac{1}{3}-1=0. \quad s=\frac{2}{3}.$

ただし, $0<t<1$であるから

$0<-k+\frac{1}{3}<1. \quad -\frac{2}{3}<k<\frac{1}{3}.$

このとき,

$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right),$

$\overrightarrow{OQ}=\left(1+k-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OB}+\left(-k+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OC}$

$=\left(k+\frac{2}{3}\right)(4k,-2k+2,-k+1)$

$\quad+\left(-k+\frac{1}{3}\right)(4k+4,-2k,-k)$

$=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

であるから, 求めるP, Qの座標は

$P\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right),$

$Q\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right).\cdots$(答)

$\boxed{4}$

問1

$$x^3-2x^2+x-ax$$
$$=x(x^2-2x+1-a)$$

より、求める条件は，

$x^2-2x+1-a=0$ が 0 以外の異なる２つの実数解をもつための a の条件

である．

$$f(x)=x^2-2x+1-a$$

とおき，$f(x)=0$ の判別式を D とすると求める条件は，

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot(1-a)>0 \\ f(0)=1-a\neq 0 \end{cases}$$

すなわち、

$a>0$ かつ $a\neq 1$ …(答)

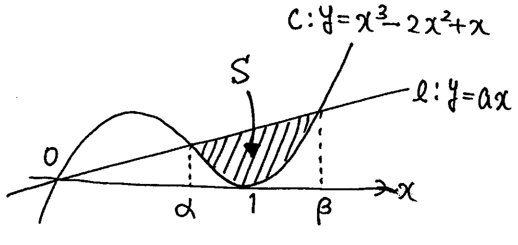
問2　$f(x)=0$ を解くと，

$$x=1\pm\sqrt{a}\ .$$

$0<\alpha<\beta$ と問1の結果より，

$$0<a<1$$

である．この条件のもとで，



$\alpha\leqq x\leqq\beta$ のとき

$$ax\geqq x^3-2x^2+x$$

であるから，

$$S=\int_\alpha^\beta\{ax-(x^3-2x^2+x)\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha+\alpha)(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^3+(2\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+\alpha(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}dx$$
$$=-\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}+\frac{2\alpha-\beta}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$
$$=-\left\{\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}+\frac{2\alpha-\beta}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{\alpha}{2}(\beta-\alpha)^3\right\}.$$
$$=-\left(\frac{\beta-\alpha}{4}+\frac{2\alpha-\beta}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{12}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^3$$

ここで，$\alpha=1-\sqrt{a}$，$\beta=1+\sqrt{a}$ であるから，

$$S=\frac{1}{12}\cdot2\cdot(2\sqrt{a})^3$$
$$=\frac{4a\sqrt{a}}{3}\ .$$ …(答)