1

(1) 曲線 $y=f(x)$ は点 $\left(2,\ 2-\frac{c}{2}\right)$ を通るから，

$$f(2)=2-\frac{c}{2}$$
$$a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=2-\frac{c}{2}$$
$$8a+4b+3c=4 \quad \cdots ①$$

また，

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_0^3$$
$$=9a+\frac{9}{2}b+3c$$

であるから，$\int_0^3 f(x)\,dx=\frac{9}{2}$ より，

$$9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{9}{2} \cdots ②$$

②－①より，

$$a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}$$
$$b=1-2a$$

これを①に代入して，

$$8a+4(1-2a)+3c=4$$
$$c=0$$

したがって，

$$f(x)=ax^2+(1-2a)x \quad \cdots (答)$$

(2)
$$f(x)=ax^2+(1-2a)x$$

より，

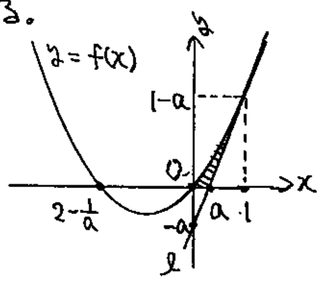
$$f'(x)=2ax+1-2a$$

であるから，点 $(1,\ f(1))$ つまり $(1,\ 1-a)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 ℓ の方程式は，

$$y-(1-a)=f'(1)(x-1)$$
$$y=1\cdot(x-1)+1-a$$
$$y=x-a \quad \cdots (答)$$

(3)
$$f(x)=ax\left\{x-\left(2-\frac{1}{a}\right)\right\}$$

であり，$0<a<\frac{1}{2}$ のとき，$2-\frac{1}{a}<0$ であるから，S は次図の斜線部分の面積である。



$$S=\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{2}(1-a)(1-a)$$
$$=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(1-2a)x^2\right]_0^1-\frac{1}{2}(1-a)^2$$
$$=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a$$
$$=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}$$

$0<a<\frac{1}{2}$ のとき，S の最大値は，

$$\frac{1}{18} \quad \cdots (答)$$

であり，そのときの a の値は，

$$a=\frac{1}{3} \quad \cdots (答)$$

2

(1) 数列$\{a_n\}$は，$a_n=a_{n-3}$を満たすから，mを正の整数として，

・$n=3m$のとき

$$\begin{aligned}S_n&=S_{3m}\\&=(1+3+4)\times m\\&=8m\\&=\frac{8}{3}n.\end{aligned}$$

・$n=3m-1$のとき

$$\begin{aligned}S_n&=S_{3m-1}\\&=S_{3m}-a_{3m}\\&=8m-4\\&=8\cdot\frac{n+1}{3}-4\\&=\frac{8n-4}{3}.\end{aligned}$$

・$n=3m-2$のとき

$$\begin{aligned}S_n&=S_{3m-2}\\&=S_{3m-1}-a_{3m-1}\\&=8m-4-3\\&=8m-7\\&=8\cdot\frac{n+2}{3}-7\\&=\frac{8n-5}{3}.\end{aligned}$$

したがって，

$$S_n=\begin{cases}\frac{8}{3}n & (n\text{が}3\text{の倍数のとき})\\ \frac{8n-5}{3} & (n\text{を}3\text{で割った余りが}1\text{のとき})\\ \frac{8n-4}{3} & (n\text{を}3\text{で割った余りが}2\text{のとき})\end{cases}$$

…（答）

(2) $2019=8\cdot252+3$ より

2019を8で割ると3余る．

(1)より

$$(*)\ S_n=\begin{cases}8m & (n=3m\text{のとき})\\ 8(m-1)+4 & (n=3m-1\text{のとき})\\ 8(m-1)+1 & (n=3m-2\text{のとき})\end{cases}$$

であるから，S_nを8で割った余りは

0または1または4

となり，$S_n=2019$となるmは存在しない．

したがって，$S_n=2019$となるnは存在しない．

（証明終り）

(3) k^2を8で割った余りを考える．

lを整数として，

$$k=4l+r\ (r=0,1,2,3)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}k^2&=(4l+r)^2\\&=8(2l^2+lr)+r^2\end{aligned}$$

よって，k^2を8で割った余りは

$0,1^2,2^2,3^2$

を8で割った余りと等しいから，

0，1，4

のいずれかである．

一方，(2)の(*)より，S_nは8で割った余りが0，1，4の自然数すべてを表せるから，どのような自然数kに対しても

$$S_n=k^2$$

となる自然数nが存在する．

（証明終り）

3

(1)

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\left|\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right|^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\right)\quad\cdots①$$

ここで，$|\overrightarrow{AB}|=2$ より，

$$|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}|^2=4$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+|\overrightarrow{PA}|^2=4$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+4\quad\cdots②$$

②を①に代入して，

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1\quad\cdots(答)$$

(2) $\angle AGB=\frac{\pi}{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$ より G は辺 AB を直径とする円周上にあり，

$$|\overrightarrow{MG}|=|\overrightarrow{MA}|=1$$

G は三角形 PAB の重心であるから，

$$|\overrightarrow{PM}|=3|\overrightarrow{MG}|=3$$

これを $|\overrightarrow{PM}|^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1$ に代入して，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=8\quad\cdots(答)$$

(3) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{5}{4}$ のとき，(1)より

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{9}{4}$$

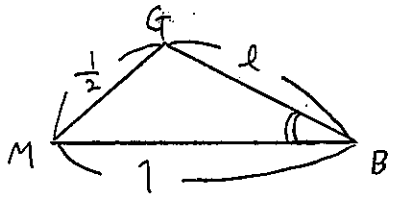
すなわち，

$$|\overrightarrow{PM}|=\frac{3}{2}$$

これより

$$|\overrightarrow{MG}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{PM}|=\frac{1}{2}$$

であるから，$|\overrightarrow{BG}|=l\ \left(\frac{1}{2}<l<\frac{3}{2}\right)$ とおくと，余弦定理より，



$$\cos\angle ABG=\cos\angle MBG$$

$$=\frac{l^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot l\cdot 1}$$

$$=\frac{l}{2}+\frac{3}{8l}$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{l}{2}\cdot\frac{3}{8l}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（(相加平均) ≧ (相乗平均) より）

等号成立は $\frac{l}{2}=\frac{3}{8l}$ より $l=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のときで，このとき三角形 PAB は存在するから，$\angle ABG$ の最大値は，

$$\frac{\pi}{6}\quad\cdots(答)$$