1

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$f(x)$ の増減は，

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

であり，$f(x)$ は

$x=e$ のとき 最大値 $\dfrac{1}{e}$

をとる．…（答）

(2) $y=e^x$ より $y'=e^x$.

$y=x^a$ より $y'=ax^{a-1}$.

2曲線の共有点Pの y 座標について，

$$e^t=t^a \cdots ①$$

また，点Pにおける共通接線の傾きについて，

$$e^t=at^{a-1} \cdots ②$$

①，②より，

$$t^a=at^{a-1}$$
$$t=a \quad (t>0 \text{より})$$

①に代入して，

$$e^a=a^a$$

よって，

$a=e$，$t=e$．…（答）

これは $a>0$，$a\neq 1$ を満たす．

(3) $x>0$，$x\neq e$ のとき，

$$\log e^x-\log x^e$$
$$=x-e\log x$$
$$=ex\left\{\frac{1}{e}-f(x)\right\}$$

(1)の結果より $x\neq e$ のもとで，

$f(x)<\dfrac{1}{e}$ であるから，

$$\log e^x-\log x^e>0$$
$$\log e^x>\log x^e$$

底 e は1より大きいので，

$e^x>x^e$．…（答）

$\boxed{2}$

(1)

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\left|\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right|^2$$

$$=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})\quad\cdots①$$

ここで，$|\overrightarrow{AB}|=2$ より，

$$|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}|^2=4$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+|\overrightarrow{PA}|^2=4$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+4\quad\cdots②$$

②を①に代入して，

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1\quad\cdots(答)$$

(2)　$\angle AGB=\frac{\pi}{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$ より G は辺ABを直径とする円周上にあり，

$$|\overrightarrow{MG}|=|\overrightarrow{MA}|=1$$

Gは三角形PABの重心であるから，

$$|\overrightarrow{PM}|=3|\overrightarrow{MG}|=3$$

これを $|\overrightarrow{PM}|^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1$ に代入して，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=8\quad\cdots(答)$$

(3)　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{5}{4}$ のとき，(1)より

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{9}{4}$$

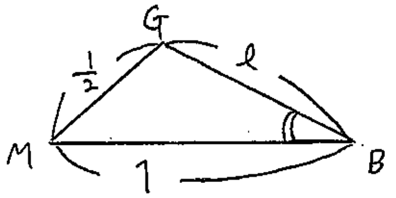
すなわち，

$$|\overrightarrow{PM}|=\frac{3}{2}$$

これより

$$|\overrightarrow{MG}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{PM}|=\frac{1}{2}$$

であるから，$|\overrightarrow{BG}|=l\ \left(\frac{1}{2}<l<\frac{3}{2}\right)$ とおくと，余弦定理より，



$$\cos\angle ABG=\cos\angle MBG$$

$$=\frac{l^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot l\cdot 1}$$

$$=\frac{l}{2}+\frac{3}{8l}$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{l}{2}\cdot\frac{3}{8l}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（（相加平均）≧（相乗平均）より）

等号成立は $\frac{l}{2}=\frac{3}{8l}$ より $l=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のときで，このとき三角形PABは存在するから，$\angle ABG$ の最大値は，

$$\frac{\pi}{6}\quad\cdots(答)$$

3

2個のさいころの出た目の数をA, Bとする。2個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積をXとすると，Xの値は次の[表1]のようになる。

[表1]

B＼A	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

また，$X-1$の値は次の[表2]のようになる。

[表2]

B＼A	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

「Xをnでわった余りが1」

となることは

「$X-1$がnでわり切れる」

となることである。

(1) p_2：「$X-1$が2でわり切れる確率」

[表2]より，$p_2=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ …(答)

p_3：「$X-1$が3でわり切れる確率」

[表2]より，$p_3=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ …(答)

p_4：「$X-1$が4でわり切れる確率」

[表2]より，$p_4=\frac{5}{36}$ …(答)

(2) $n\geqq 36$のとき，[表2]より$X-1$がnでわり切れるのは1通りしか存在しない。よって

$$p_n=\frac{1}{36}\quad(n\geqq 36)\quad\cdots(\text{答})$$

3

(3) [表2] は次のように書き直せる。

B＼A	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	2^2	5
2	1	3	5	7	3^2	11
3	2	5	2^3	11	$2\cdot7$	17
4	3	7	11	$3\cdot5$	19	23
5	2^2	3^2	$2\cdot7$	19	$2^3\cdot3$	29
6	5	11	17	23	29	$5\cdot7$

$P_n=\frac{1}{18}=\frac{2}{36}$ となる条件は，$X-1$ が n でわり切れるような $X-1$ の値がちょうど2個存在することである．上の表において，$A \neq B$ のときの $X-1$ の値は必ず2個以上存在し，また $X-1$ が0のとき $X-1$ は必ず n でわり切れるので，$A=B$ のときの場合から n を探せばよい。

(1)と(2)の結果から，n は $5 \leqq n \leqq 35$ で考えてもよい。

表より，n は

$$2^3,\ 3\cdot5,\ 2^3\cdot3,\ 5\cdot7$$

の正の約数であることが必要であり，

$X-1$	正の約数
2^3	$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$
$3\cdot5$	$1,\ 3,\ 5,\ 3\cdot5$
$2^3\cdot3$	$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$ $3,\ 2\cdot3,\ 2^2\cdot3,\ 2^3\cdot3$
$5\cdot7$	$1,\ 5,\ 7,\ 5\cdot7$

である．この中で一度しか現れない5以上35以下の整数は

$$2\cdot3,\ 7,\ 2^2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 2^3\cdot3,\ 5\cdot7$$

すなわち

$$6,\ 7,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35$$

である。[表2] よりこれらの値の中で条件を満たすものは

$$6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35$$

であるから，$P_n=\frac{1}{18}$ となる n は

$$n=6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35 \cdots（答）$$

$\boxed{4}$

(1) 数列 $\{a_n\}$ は，$a_n = a_{n-3}$ を満たすから，m を正の整数として，

・$n = 3m$ のとき

$$S_n = S_{3m} = (1+3+4)\times m = 8m = \frac{8}{3}n.$$

・$n = 3m-1$ のとき

$$S_n = S_{3m-1} = S_{3m} - a_{3m} = 8m-4 = 8\cdot\frac{n+1}{3} - 4 = \frac{8n-4}{3}.$$

・$n = 3m-2$ のとき

$$S_n = S_{3m-2} = S_{3m-1} - a_{3m-1} = 8m-4-3 = 8m-7 = 8\cdot\frac{n+2}{3} - 7 = \frac{8n-5}{3}.$$

したがって，

$$S_n = \begin{cases} \frac{8}{3}n & (n\text{ が }3\text{ の倍数のとき}) \\ \frac{8n-5}{3} & (n\text{ を }3\text{ で割った余りが }1\text{ のとき}) \\ \frac{8n-4}{3} & (n\text{ を }3\text{ で割った余りが }2\text{ のとき}) \end{cases}$$

…（答）

(2) $2019 = 8\cdot 252 + 3$ より

2019 を 8 で割ると 3 余る．

(1) より，

$$(*)\ S_n = \begin{cases} 8m & (n=3m\text{ のとき}) \\ 8(m-1)+4 & (n=3m-1\text{ のとき}) \\ 8(m-1)+1 & (n=3m-2\text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，S_n を 8 で割った余りは

0 または 1 または 4

となり，$S_n = 2019$ となる m は存在しない．

したがって，$S_n = 2019$ となる n は存在しない．

（証明終り）

(3) k^2 を 8 で割った余りを考える．

l を整数として，

$$k = 4l + r\ (r = 0, 1, 2, 3)$$

とおくと，

$$k^2 = (4l+r)^2 = 8(2l^2 + lr) + r^2$$

よって，k^2 を 8 で割った余りは

$$0,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2$$

を 8 で割った余りと等しいから，

$$0,\ 1,\ 4$$

のいずれかである．

一方，(2) の $(*)$ より，S_n は 8 で割った余りが 0, 1, 4 の自然数すべてを表せるから，どのような自然数 k に対しても

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する．

（証明終り）

$\boxed{5}$

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t$$
$$= 2\cos^2 t + \cos t - 1$$
$$= (2\cos t - 1)(\cos t + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$= 2\cos t + 1 - \frac{1}{\cos t} \qquad \cdots(答)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$
$$= \frac{-2\sin t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\cos t}$$
$$= -2\tan t - \tan t(1+\tan^2 t)$$
$$= -\tan t(\tan^2 t + 3) \qquad \cdots(答)$$

(2) (1) より、

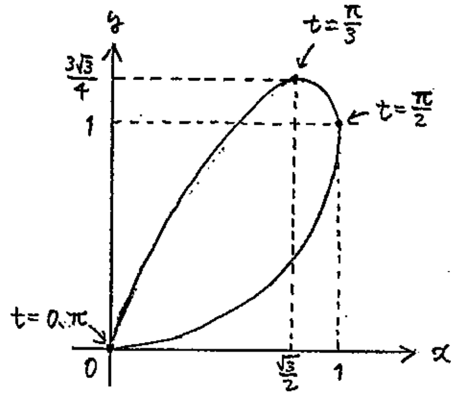
$$\begin{cases} 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ より 上に凸}, \\ \frac{\pi}{2} < t < \pi \text{ のとき } \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \text{ より 下に凸}. \end{cases}$$

…(答)

さらに(1)より、次のようになる.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	$(0, 0)$		$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$		$(1, 1)$		$(0, 0)$

したがって、Cの概形は次のようになる.



…(答)

(3) $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ のときの y を y_1, $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ のときの y を y_2 とすると、

$$S = \int_0^1 y_1\,dx - \int_0^1 y_2\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)\sin t \cdot \cos t\,dt - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)\sin t \cdot \cos t\,dt$$
$$= -\int_0^{\pi} (\cos t + \cos^2 t)\cdot(\cos t)'\,dt$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}(1-1) - \frac{1}{3}(-1-1)$$
$$= \frac{2}{3} \qquad \cdots(答)$$