1

問1

$x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$

$=(x^3+x^2+x+1)(x^2+x+a-2)$

$+(3-a)x^2+(4-a)x+4-a.$

$R(x)$の1次の項の係数が1より,

$4-a=1$

$a=3.$ …(答)

よって

$Q(x)=x^2+x+1$
$R(x)=x+1.$ …(答)

問2

$\log_{10}8.94^{18}=18\log_{10}8.94$

常用対数表より,

$0.951<\log_{10}8.94<0.952$

$0.951\times18<\log_{10}8.94^{18}<0.952\times18$

$10^{17.118}<8.94^{18}<10^{17.136}$ …①

よって 8.94^{18}の整数部分は,

18桁. …(答)

常用対数表より,

$\log_{10}1.3<0.118$

$\log_{10}1.4>0.136$

これと①より,

$1.3\times10^{17}<10^{17.118}$

$<8.94^{18}$

$<10^{17.136}$

$<1.4\times10^{17}$

よって, 8.94^{18}の最高位からの2桁の数字は,

13. …(答)

2

$$f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$$

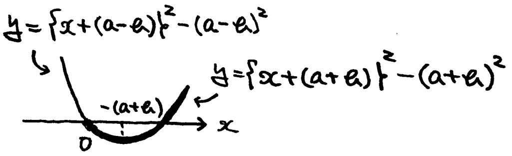
$$=\begin{cases} x^2+2(a+b)x & (x\geqq 0)\\ x^2+2(a-b)x & (x<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \{x+(a+b)\}^2-(a+b)^2 & (x\geqq 0)\\ \{x+(a-b)\}^2-(a-b)^2 & (x<0)\end{cases}$$

$b>0$ より $-(a+b)<-(a-b)$．

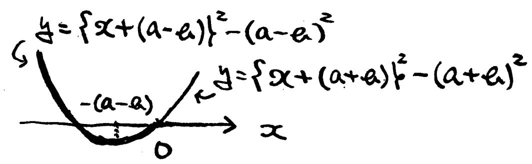
ゆえに

(i) $0\leqq-(a+b)$ すなわち $a\leqq -b$ のとき



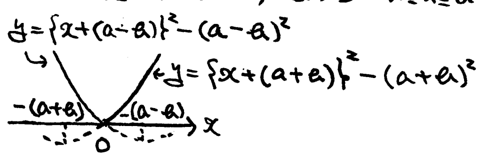
$$m=-(a+b)^2$$

(ii) $-(a-b)\leqq 0$ すなわち $b\leqq a$ のとき



$$m=-(a-b)^2$$

(iii) $-(a+b)\leqq 0\leqq-(a-b)$ すなわち $-b\leqq a\leqq b$ のとき



$$m=0$$

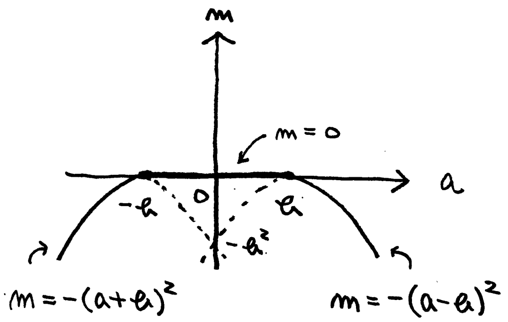
以上 (i), (ii), (iii) より

$$m=\begin{cases} -(a+b)^2 & (a\leqq -b \text{ のとき})\\ 0 & (-b\leqq a\leqq b \text{ のとき})\\ -(a-b)^2 & (b\leqq a \text{ のとき})\end{cases}$$

…（答）

次に，aの値を変化させて

グラフをかくと



…（答）

3

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく．

(i)　$a<0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線なので，すべての実数 b に対して $f(x)<0$ となる実数 x が存在する．

(ii)　$a=0$ のとき

$f(x)=bx+c$ であり，$y=f(x)$ のグラフは傾き b の直線である．

$b\neq 0$ のとき $f(x)<0$ となる実数 x は必ず存在し，また $b=0$ のとき $f(x)<0$ となる実数 x が存在する条件は　$c<0$．

よって，(ii) の場合，すべての実数 b に対して $f(x)<0$ となる実数 x が存在する条件は

$$c<0$$

(iii)　$a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線なので，$f(x)<0$ となる実数 x が存在する条件は $f(x)=0$ の判別式を考えて

$$b^2-4ac>0$$

すなわち　$b^2>4ac$．

これがすべての実数 b に対して成り立つ条件は

$$4ac<0$$

$a>0$ なので，これは

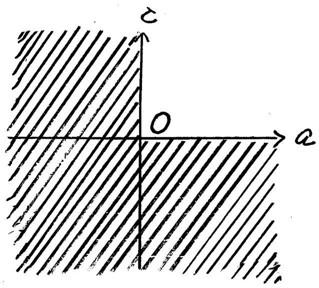
$$c<0.$$

以上から，求める必要十分条件は

$a<0$ または（$a\geqq 0$ かつ $c<0$）．

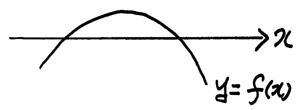
…（答）

これを満たす点 (a,c) を ac 平面上に図示すると図の斜線部分（境界は含まない）．

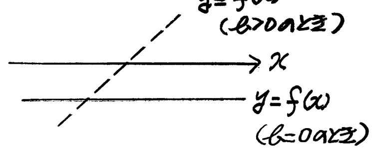


(注)

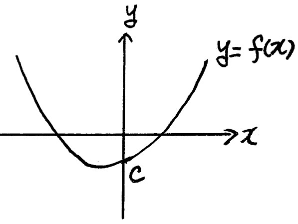
(i) の場合



(ii) の場合



(iii) の場合



$\boxed{4}$

$l\ (1 \leqq l \leqq n)$ が条件をみたすkとなるのは

$X_1 \leqq 4,\ X_2 \leqq 4,\ \cdots,\ X_{l-1} \leqq 4$
（$l=1$ のときこの部分はない）
かつ
$X_l \geqq 5,\ X_{l+1} \geqq 5,\ \cdots,\ X_{l+m} \geqq 5$
（m は $0 \leqq m \leqq n-l$ をみたす整数）
かつ
$X_{l+m+1} \leqq 4,\ X_{l+m+2} \leqq 4,\ \cdots,\ X_n \leqq 4$
（$m=n-l$ のときこの部分はない）
となる場合である．

この確率を P_l とおくと，

$$
\begin{aligned}
P_l &= \sum_{m=0}^{n-l}\left(\frac{2}{3}\right)^{l-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-m} \\
&= \sum_{m=0}^{n-l}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-m}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{m=0}^{n-l}\left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{m=0}^{n-l}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-l+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-l+1}\right\} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{-l+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 2^{l-1}.
\end{aligned}
$$

したがって，求める確率は，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} P_l \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{l=1}^{n} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{l=1}^{n} 2^{l-1} \\
&= n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{2^n-1}{2-1} \\
&= (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}
$$

…（答）

$\boxed{5}$

正方形$B_1B_2B_3B_4$を含む平面をαとし，球面の中心とαの距離を

$$r \quad (0 \leqq r < 1)$$

とする．

rを固定して，5点を動かしたときの四角錐の体積の最大値を$V(r)$とする．

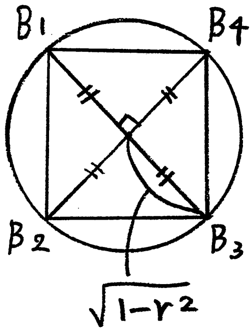
球面とαとの交円の半径は

$$\sqrt{1-r^2}$$

であり，正方形$B_1B_2B_3B_4$はこの円に内接する．したがってその面積は

$$4\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^2$$
$$=2(1-r^2)$$

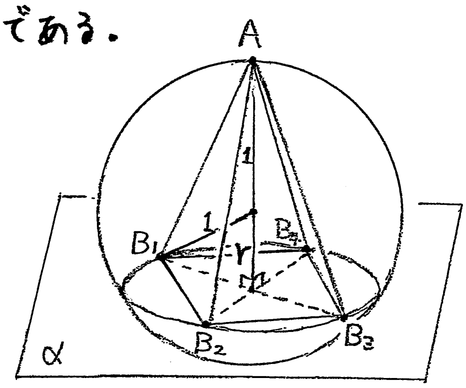
で，一定である．



また，Aを球面上で動かすとき，四角錐の高さが最大となるのは，点Aが下図の位置にあるときで，その高さは

$$1+r$$

である．



以上より

$$V(r)=\frac{1}{3}\cdot 2(1-r^2)(1+r)$$
$$=\frac{2}{3}(-r^3-r^2+r+1).$$

次に，rを$0 \leqq r < 1$で動かすときの$V(r)$の最大値を求める．

$$V'(r)=\frac{2}{3}(-3r^2-2r+1)$$
$$=-\frac{2}{3}(3r-1)(r+1).$$

$0 \leqq r < 1$における$V(r)$の増減は下表のようになる

r	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，$r=\frac{1}{3}$のとき$V(r)$は最大となり，その最大値は

$$V\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{81} \quad \cdots(答)$$

である．