$\boxed{1}$ 問1

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$,

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より,

$$\cos 3\theta = \cos\theta\,(2\cos 2\theta - 1).$$

$2\cos 2\theta - 1 \neq 0$ とすると,

$$\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1}$$

となり, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$ が有理数であれば $\cos\theta$ は有理数となる.

よって, $\cos\theta$ が有理数でなく, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$ が有理数となるなら,

$$2\cos 2\theta - 1 = 0.$$

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$\theta = \frac{\pi}{6}.$$

このとき, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (有理数でない), $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ (有理数), $\cos 3\theta = 0$ (有理数) となり, 題意を満たす.

よって,

$$\theta = \frac{\pi}{6}. \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{1}$ 問2

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot(\tan x)'\,dx$$

$$= \Big[x\cdot\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\cdot\tan x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \Big[\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \quad \cdots(答)$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} - \frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin x) - \log(1-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$= \log(\sqrt{2}+1) \quad \cdots(答)$$

2

$n, n+1$は連続する整数より，一方は偶数．
kを偶数とすると，$k^3, 2k^2, 2$は偶数より

$$|f(k)| = |k^3+2k^2+2|$$

は偶数．

よって，$|f(n)|, |f(n+1)|$の少なくとも一方は偶数．

素数のうち偶数であるものは2に限るから

$$|f(n)| = 2 \quad または \quad |f(n+1)| = 2.$$

$|f(n)| = 2$のとき，

$$f(n) = 2 \quad または \quad f(n) = -2.$$

(i) $f(n) = 2$のとき，

$$n^3+2n^2+2 = 2.$$
$$n^2(n+2) = 0.$$
$$n = 0, -2.$$

(ii) $f(n) = -2$のとき，

$$n^3+2n^2+2 = -2.$$
$$n^2(n+2) = -4. \quad \cdots (*)$$

ここで，$n^2, n+2$はともに整数であり
$n^2 \geqq 0$より，$n+2<0$に注意すると，

$$n+2 = -4, -2, -1$$

すなわち

$$n = -6, -4, -3.$$

しかし，いずれも$(*)$は満たさない．

(i)，(ii)より$|f(n)| = 2$を満たすnは，

$$n = 0, -2.$$

よって，$|f(n+1)| = 2$を満たすnは，

$$n+1 = 0, -2$$

より

$$n = -1, -3.$$

また，$n = 0, -1, -2, -3$に対応する
$|f(n)|, |f(n+1)|$の値は次の通り．

n	0	-1	-2	-3
$\lvert f(n)\rvert$	2	3	2	7
$\lvert f(n+1)\rvert$	5	2	3	2

2，3，5，7は素数であるから，
いずれも条件を満たす．

よって，求めるnの値は，

$$n = 0, -1, -2, -3. \quad \cdots (答)$$

$\boxed{2.}$ 〈別解〉

mが2以上の偶数のとき，

$$|f(m)| = |m^3+2m^2+2|$$

は，2より大きい偶数となり，素数でない．

mが-4以下の偶数のとき，

$$|f(m)| = |m^2(m+2)+2|$$

であり，$m^2(m+2) \leqq -32$に注意すると

$|f(m)|$は2より大きい偶数となり素数でない

よって，$n \leqq -4$または$n \geqq 1$を満たす任意の整数nに対して，

$|f(n)|$，$|f(n+1)|$の少なくとも一方は素数でない．

$n=0,-1,-2,-3$に対応する$|f(n)|$，$|f(n+1)|$の値は次のよう．

n	0	-1	-2	-3
$\lvert f(n)\rvert$	2	3	2	7
$\lvert f(n+1)\rvert$	5	2	3	2

2，3，5，7は素数である．

以上より，求めるnの値は，

$$n=0,-1,-2,-3. \quad \cdots(答)$$

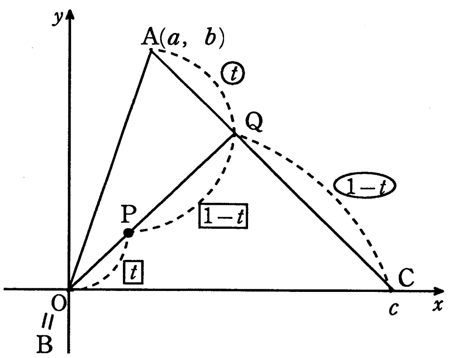
$\boxed{3}$ 角B, 角Cはいずれも鋭角

であるから, 座標平面上に

A(a, b), B$(0, 0)$, C$(c, 0)$

$(0<a<c,\ b>0)$

とおける.（B＝Oである.）



このとき,

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OQ}$

$=t\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}\}$

$=(t(1-t)a+t^2c,\ t(1-t)b)$

と表せるから, 点Pの座標を(x, y)とおくと,

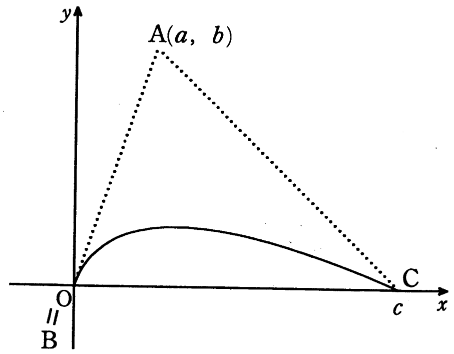
$$\begin{cases} x=t(1-t)a+t^2c=(c-a)t^2+at, \\ y=t(1-t)b=b(t-t^2). \end{cases}$$

$0<t<1$ において,

・$\dfrac{dx}{dt}=2(c-a)t+a>0$,

・$y>0$

であるから, 求める面積をTとすると,



$T=\int_0^c y\,dx$

$=\int_0^1 y\dfrac{dx}{dt}dt$

$=\int_0^1 b(t-t^2)\{2(c-a)t+a\}dt$

$=b\int_0^1\{2(a-c)t^3+(2c-3a)t^2+at\}dt$

$=b\left[\dfrac{a-c}{2}t^4+\dfrac{2c-3a}{3}t^3+\dfrac{a}{2}t^2\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{6}bc.$

$S=\dfrac{1}{2}bc$であるから,

$T=\dfrac{1}{3}S.$ …(答)

4

ℓ $(1 \leqq \ell \leqq n)$ が条件をみたす

ものとなるのは

$X_1 \leqq 4,\ X_2 \leqq 4,\ \cdots,\ X_{\ell-1} \leqq 4$

（$\ell=1$ のときこの部分はない）

かつ

$X_\ell \geqq 5,\ X_{\ell+1} \geqq 5,\ \cdots,\ X_{\ell+m} \geqq 5$

（m は $0 \leqq m \leqq n-\ell$ をみたす整数）

かつ

$X_{\ell+m+1} \leqq 4,\ X_{\ell+m+2} \leqq 4,\ \cdots,\ X_n \leqq 4$

（$m=n-\ell$ のときこの部分はない）

となる場合である。

この確率を P_ℓ とおくと、

$$
\begin{aligned}
P_\ell &= \sum_{m=0}^{n-\ell}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-\ell-m} \\
&= \sum_{m=0}^{n-\ell}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-m}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n-\ell}\left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n-\ell}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\ell+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\ell+1}\right\} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\ell+1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\cdot 2^{\ell-1}.
\end{aligned}
$$

したがって、求める確率は、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{n} P_\ell \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sum_{\ell=1}^{n}1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sum_{\ell=1}^{n}2^{\ell-1} \\
&= n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\cdot\frac{2^{n}-1}{2-1} \\
&= (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.
\end{aligned}
$$

…（答）

5

正方形$B_1B_2B_3B_4$を含む平面をαとし，球面の中心とαの距離を

$$r \quad (0 \leqq r < 1)$$

とする．

rを固定して，5点を動かしたときの四角錐の体積の最大値を$V(r)$とする．

球面とαとの交円の半径は

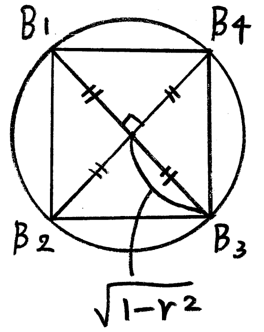
$$\sqrt{1-r^2}$$

であり，正方形$B_1B_2B_3B_4$はこの円に内接する．したがってその面積は

$$4\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^2$$

$$=2(1-r^2)$$

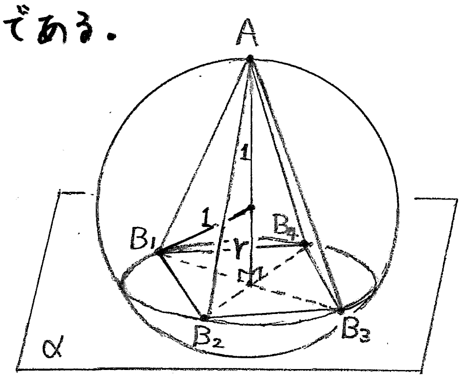
で，一定である．



また，Aを球面上で動かすとき，四角錐の高さが最大となるのは，点Aが下図の位置にあるときで，その高さは

$$1+r$$

である．



以上より

$$V(r)=\frac{1}{3}\cdot 2(1-r^2)(1+r)$$

$$=\frac{2}{3}(-r^3-r^2+r+1).$$

次に，rを$0\leqq r<1$で動かすときの$V(r)$の最大値を求める．

$$V'(r)=\frac{2}{3}(-3r^2-2r+1)$$

$$=-\frac{2}{3}(3r-1)(r+1).$$

$0\leqq r<1$における$V(r)$の増減は下表のようになる

r	0	…	$\frac{1}{3}$	…	(1)
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗		↘	

したがって，$r=\frac{1}{3}$のとき$V(r)$は最大となり，その最大値は

$$V\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{81}\quad\cdots(\text{答})$$

である．

6

$$(1+i)^n+(1-i)^n>10^{10} \quad \cdots ①$$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ より，

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ より，

$$(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

よって，①は

$$2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}>10^{10} \quad \cdots ②$$

②が成り立つとき，

$$2(\sqrt{2})^n \geqq 2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}>10^{10}$$

より，

$$2(\sqrt{2})^n>10^{10}$$

となるから，

$$\left(1+\frac{n}{2}\right)\log_{10}2>10 \quad \cdots ③$$

ここで，常用対数表から

$$0.3<\log_{10}2<0.302 \quad \cdots ④$$

であるから，

$$33\log_{10}2<33\times 0.302$$
$$=9.966<10 \quad \cdots ⑤$$

③，⑤より，

$$1+\frac{n}{2}>33$$
$$n \geqq 65 \quad \cdots ⑥$$

$n=65$ とすると，

$$2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}=2(\sqrt{2})^{65}\cos\frac{65\pi}{4}$$
$$=2^{33}<10^{10} \quad (⑤より)$$

となり，②を満たさない．

②が成り立つとき，$\cos\frac{n\pi}{4}>0$ であり，これと⑥および $n \neq 65$ より，

$$n \geqq 71$$

であることが必要．

$n=71$ とすると，

$$2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}=2(\sqrt{2})^{71}\cos\frac{71\pi}{4}=2^{36}$$

④より，

$$36\log_{10}2>36\times 0.3=10.8>10$$

であるから

$$2^{36}>10^{10}$$

となり，②を満たす．

以上により，求める n の値は

$$n=71 \quad \cdots (答)$$