[1](1) $a_n = a\cdot r^{n-1}$

である.

$b_1 = a_1 = a$, $b_{n+1} = b_n\cdot a_{n+1}$

より, $n \geqq 2$ のとき,

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1}a_n \\
&= b_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n \\
&= b_{n-3}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n \\
&\ \ \vdots \\
&= b_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_n \\
&= a\cdot(ar)\cdot(ar^2)\cdot(ar^3)\cdots(ar^{n-1}) \\
&= a^n\cdot r^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \\
&= a^n\cdot r^{\frac{1}{2}n(n-1)}.
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ のときも成立する.

$$\therefore\ b_n = a^n\cdot r^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

(2)

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{\log_2 b_n}{n} \\
&= \frac{\log_2\{a^n\cdot r^{\frac{1}{2}n(n-1)}\}}{n} \\
&= \frac{n\log_2 a + \frac{1}{2}n(n-1)\log_2 r}{n} \\
&= \log_2 a + \frac{1}{2}(n-1)\log_2 r.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} - c_n &= \left(\log_2 a + \frac{1}{2}n\cdot\log_2 r\right) \\
&\quad - \left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(n-1)\cdot\log_2 r\right\} \\
&= \frac{1}{2}\log_2 r
\end{aligned}
$$

より, $\{c_n\}$ は公差 $\frac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列 ■

(3)

$$
\begin{aligned}
M_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k \\
&= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r\right\} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n\left\{2\log_2 a + \frac{1}{2}(n-1)\log_2 r\right\} \\
&= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\cdot\log_2 r \\
&= \log_2\left\{a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_n &= 2^{M_n} \\
&= 2^{\log_2\{a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}\}} \\
&= a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{a\cdot r^{\frac{1}{4}n}}{a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}} = r^{\frac{1}{4}}
$$

より, $\{d_n\}$ は公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列 ■

[2]

(1)

上面の数	n回後		$(n+1)$回後
0	P_n	$\xrightarrow{\times p}$	P_{n+1}
1	$1-P_n$	$\nearrow \times(1-p)$	

推移図より,

$$P_{n+1} = P_n \times p + (1-P_n)\times(1-p)$$
$$= (2p-1)P_n + 1 - p$$

これは,

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

と変形することができる

これより, 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ は,

初項 $P_1 - \frac{1}{2}$, 公比 $2p-1$ の等比数列

であり, $P_1 = p$ であるから,

$$P_n - \frac{1}{2} = \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

よって,

$$P_n = \frac{1}{2}\left\{(2p-1)^n + 1\right\}.$$

(2) n回の試行の後, カードの上の面に書かれた数字が0であり, さらに, 途中でカードが少なくとも1回裏返される事象をAとすると, その確率$P(A)$は,

$$P(A) = P_n - p^n$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(2p-1)^n + 1\right\} - p^n.$$

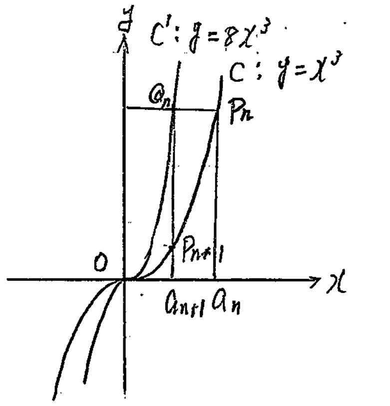
また, 途中でちょうど2回裏返される事象をBとすると,

$$P(A\cap B) = {}_nC_2(1-p)^2 p^{n-2}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}(1-p)^2 p^{n-2}.$$

よって, 求める確率は,

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}(1-p)^2 p^{n-2}}{\frac{1}{2}\left\{(2p-1)^n+1\right\} - p^n}$$
$$= \frac{n(n-1)p^{n-2}(1-p)^2}{\left\{(2p-1)^n+1\right\} - 2p^n}.$$

[3]



(1)

$P_n(a_n,\ a_n^3)$ より，Q_n の x 座標は

$$8x^3 = a_n^3$$

より，

$$x = \frac{a_n}{2}.$$

このとき，P_{n+1} の x 座標について

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}.$$

すると，数列 $\{a_n\}$ は

初項：$a_1 = 1$，公比 $\frac{1}{2}$

の等比数列であるから

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(2)

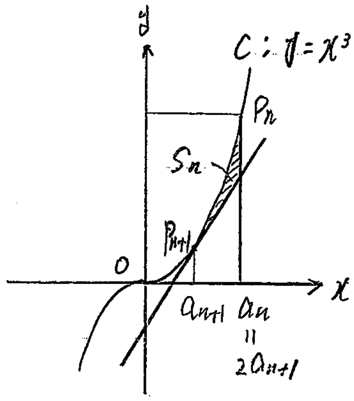
$y = x^3$ より，$y' = 3x^2$ であり

$P(a_{n+1},\ a_{n+1}^3)$ であるから

P_{n+1} における接線の方程式は

$$y - a_{n+1}^3 = 3a_{n+1}^2(x - a_{n+1}).$$

$$y = 3a_{n+1}^2 x - 2a_{n+1}^3.$$



$a_n = 2a_{n+1}$ であるから

$$S_n = \int_{a_{n+1}}^{2a_{n+1}} \left\{x^3 - (3a_{n+1}^2 x - 2a_{n+1}^3)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}a_{n+1}^2 x^2 + 2a_{n+1}^3 x\right]_{a_{n+1}}^{2a_{n+1}}$$

$$= \frac{5}{4}a_{n+1}^4$$

$$= \frac{5}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^4$$

$$= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^n.$$

(3)

(2)より

$$T_n = \frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{16}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{1}{12}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}.$$

[4]

(1) $t>0$ より，

直線 PA の傾き：$-\frac{3}{t}$.

直線 PB の傾き：$\frac{1}{t}$. …①

よって，$\angle APB=90^\circ$ となる条件は，

$$-\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1.$$

$$t^2=3.$$

$t>0$ より，

$$t=\sqrt{3}.$$

(2) ①より，直線 AD の方程式は，

$$y=-tx+3 \quad \cdots ②$$

また，P から直線 AB に下ろした垂線の方程式は

$$y=0 \quad \cdots ③$$

②，③ の交点が H であるから，②，③ を連立させて，

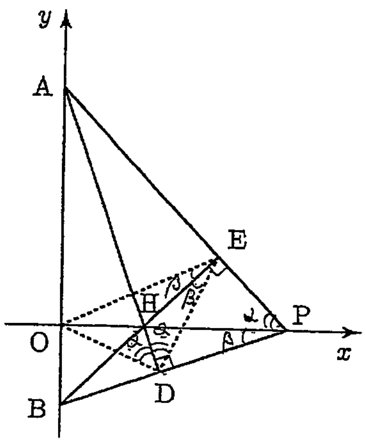
$$-tx+3=0$$

$$x=\frac{3}{t}.$$

したがって，

$$H\left(\frac{3}{t},\ 0\right).$$

(3)



$\angle APO=\alpha$，$\angle BPO=\beta$ とおく.

四角形 PEHD は，

$$\angle PEH=\angle HDP=90^\circ$$

より，円に内接する四角形であり，

$\angle DEH=\angle DPH=\beta$（$\overset{\frown}{HD}$ の円周角）…④

また，四角形 PEOB は，

$$\angle PEB=\angle POB=90^\circ$$

より，円に内接する四角形であり，

$\angle BPO=\angle BEO=\beta$（$\overset{\frown}{BO}$ の円周角）…⑤

$\angle DPH=\angle BPO$ だから，④，⑤より，

$$\angle DEH=\angle BEO=\beta$$

すなわち，$\angle DEH=\angle HEO=\beta$ …㊟

同様にして，

$\angle ODH=\angle HDE=\alpha$ …㊟㊟

㊟，㊟㊟ より H は $\triangle ODE$ において

$\angle E$ と $\angle D$ の二等分線の交点，

であることがわかり，H は $\triangle ODE$ の内心である．

（証明終り）

(4) 直線 PB の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}x-1. \quad \cdots ⑥$$

②と⑥を連立させて，

$$-tx+3=\frac{1}{t}x-1.$$

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)x=4.$$

$$x=\frac{4t}{t^2+1}.$$

②より，
$$y=\frac{-t^2+3}{t^2+1}.$$

よって，

$$D\left(\frac{4t}{t^2+1},\ \frac{-t^2+3}{t^2+1}\right)$$

よって，直線ODの方程式は，

$$y = \frac{-t^2+3}{4t}x$$

すなわち，

$$(3-t^2)x - 4ty = 0.$$

これと H $\left(\frac{3}{t}, 0\right)$ との距離が求める円の半径であるから，

$$\frac{\left|\frac{3}{t}(3-t^2)\right|}{\sqrt{(3-t^2)^2+16t^2}}$$

$$= \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}$$

$(t>\sqrt{3}$ より$)$