[1] (1)　$a_n = a\cdot r^{n-1}$

である．

$b_1 = a_1 = a$，$b_{n+1} = b_n \cdot a_{n+1}$

より，$n \geqq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1}\, a_n \\
&= b_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n \\
&= b_{n-3}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n \\
&\ \ \vdots \\
&= b_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_n \\
&= a\cdot(ar)\cdot(ar^2)\cdot(ar^3)\cdots(ar^{n-1}) \\
&= a^n\cdot r^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \\
&= a^n\cdot r^{\frac{1}{2}n(n-1)}.
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ のとき も成立する．

$$\therefore\ b_n = a^n\cdot r^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

(2)

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{\log_2 b_n}{n} \\
&= \frac{\log_2\left\{a^n\cdot r^{\frac{1}{2}n(n-1)}\right\}}{n} \\
&= \frac{n\log_2 a + \frac{1}{2}n(n-1)\log_2 r}{n} \\
&= \log_2 a + \frac{1}{2}(n-1)\log_2 r.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} - c_n &= \left(\log_2 a + \frac{1}{2}n\cdot\log_2 r\right) \\
&\quad - \left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(n-1)\log_2 r\right\} \\
&= \frac{1}{2}\log_2 r
\end{aligned}
$$

より，$\{c_n\}$ は公差 $\frac{1}{2}\log_2 r$ の等差数列．

(3)

$$
\begin{aligned}
M_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k \\
&= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left\{\log_2 a + \frac{1}{2}(k-1)\log_2 r\right\} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n\left\{2\log_2 a + \frac{1}{2}(n-1)\log_2 r\right\} \\
&= \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1)\cdot\log_2 r \\
&= \log_2\left\{a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_n &= 2^{M_n} \\
&= 2^{\log_2\left\{a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}\right\}} \\
&= a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{a\cdot r^{\frac{1}{4}n}}{a\cdot r^{\frac{1}{4}(n-1)}} \\
&= r^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

より，$\{d_n\}$ は公比 $r^{\frac{1}{4}}$ の等比数列．

[2]

(1) $a_1=a_3$ かつ $a_2=a_4$ となればよい。
$a_1=a_3$ となるような a_1 と a_3 の組み合わせは N 通りあるため、$a_2=a_4$ も同様に考えると $N\times N=N^2$ 通りの組み合わせがある。したがって、求める確率は

$$\frac{N^2}{N^4}=\frac{1}{N^2}.$$

(2) $a_2\leqq a_4$ かつ $a_1\leqq a_3$ となればよい。
$a_2<a_4$ となるカードの取り出し方は

${}_N C_2=\dfrac{N(N-1)}{2}$ 通りあり。

$a_2=a_4$ となるときは(1)より N 通り。
したがって、$a_2\leqq a_4$ となるカードの取り出し方は

$${}_N C_2+N=\frac{N(N+1)}{2}$$

となる。$a_1\leqq a_3$ についても同様であるから、求める確率は

$$\frac{\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2}{N^4}=\frac{(N+1)^2}{4N^2}.$$

(3) $a_1-a_3=a_2-a_4$ となればよい。
$a_1-a_3=a_2-a_4=k$ —① とおく。
$k=0$ のときは(1)より N^2 通りの組み合わせがある。
$k>0$ のとき $1\leqq k\leqq N-1$ であり、
①の k について a_1 と a_3 の組み合わせは $N-k$ 通りあり、a_2 と a_4 のときも同様に $N-k$ 通りある。
したがって①を満たすものは $(N-k)^2$ 通りある。
$k<0$ のとき $-(N-1)\leqq k\leqq -1$ であり、$k>0$ の場合と同様。

以上より①を満たす a_1,a_2,a_3,a_4 の組み合わせは、

$$2\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)^2+N^2$$

$$=2\sum_{k=1}^{N-1}k^2+N^2$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)+N^2$$

$$=\frac{1}{3}N(2N^2+1).$$

よって、求める確率は

$$\frac{\frac{1}{3}N(2N^2+1)}{N^4}=\frac{2N^2+1}{3N^3}.$$

(4) P_4 が原点Oに一致するときは
(1)より $a_1=a_3$ かつ $a_2=a_4$ のときであり、四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積が 2^m となるのは $a_1a_2=2^m$ となるときである。
これより、$a_1=2^l$, $a_2=2^{m-l}$ $(l=0,1,\cdots,m)$ となればよいので、a_1 と a_2 の組み合わせは $m+1$ 通り存在する。
これらの組み合わせに対し、a_3 と a_4 の組み合わせが

$a_1=a_3$ かつ $a_2=a_4$

となるように決定される。
以上より、求める確率は

$$\frac{m+1}{(2^m)^4}=\frac{m+1}{2^{4m}}.$$

〔3〕(1) $f(0)=1$.

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-e^{x}\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt \quad \cdots①$$

から,

$$f'(x)=-\cos x+x\sin x+x\cos x-e^{x}\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-f(x).$$

①を用いて,

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-1)\cos x+x\sin x\\&\quad-\{(1-x)\cos x+x\sin x-f(x)\}-f(x)\\&=2(x-1)\cos x.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)\,dx\\&=\int 2(x-1)\cos x\,dx\\&=2(x-1)\sin x-\int 2\sin x\,dx\\&=2(x-1)\sin x+2\cos x+C\end{aligned}$$

（Cは積分定数）

$f(0)=2+C=1$より, $C=-1$であるから,

$f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x-1$.

(3) $f'(x)=2(x-1)\cos x$より, 増減は次.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	-3

$f(\pi)=-3<0$.

$3<\pi$より, $1<\frac{\pi}{3}$であるから,

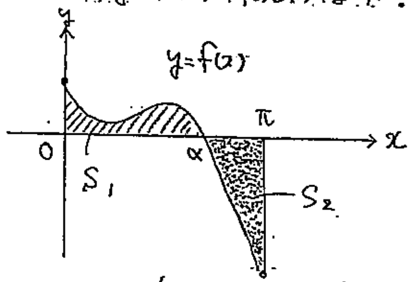
$\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}$

であることより,

$f(1)=2\cos 1-1>2\cos\frac{\pi}{3}-1=0$.

増減と$f(1)>0$, $f(\pi)<0$から, $f(x)=0$は, $0<x<\pi$の範囲にただ1つの解をもつ.

(4) (3)から, $y=f(x)$の概形は次.



$$\begin{aligned}S_1-S_2&=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx-\int_{\alpha}^{\pi}-f(x)\,dx\\&=\int_0^{\pi}f(x)\,dx\\&=\int_0^{\pi}\{2(x-1)\sin x+2\cos x-1\}\,dx\\&=\Big[2(x-1)(-\cos x)\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2\cos x\,dx\\&\qquad+\Big[2\sin x-x\Big]_0^{\pi}\\&=2\pi-4+\Big[2\sin x\Big]_0^{\pi}-\pi\\&=\pi-4.\end{aligned}$$

$\pi<4$より, $\pi-4<0$. よって,

$S_1-S_2<0$.

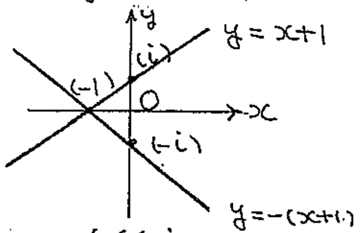
$S_1<S_2$.

[4] $w=(z+1)^2-2i$

(1) $z=x+yi$ (x, yは実数)
とおくと,

$$w=(x+1+yi)^2-2i$$
$$=(x+1)^2+2(x+1)yi-y^2-2i$$
$$=(x+1)^2-y^2+2\{(x+1)y-1\}i.$$

条件より,
$$(x+1)^2-y^2=0.$$
$$y=\pm(x+1).$$



よって,図の太線部分.

(2) 条件より,
$$\begin{cases}(x+1)^2-y^2=0, & \text{—①}\\ (x+1)y-1=0. & \text{—②}\end{cases}$$

②より, $x+1=\dfrac{1}{y}$ —③

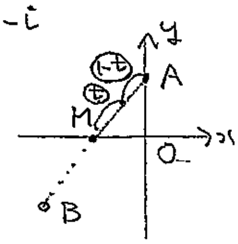
③を①に代入して,
$$\frac{1}{y^2}-y^2=0,$$
$$y^4=1.$$

yは実数であるから,
$$y=\pm1.$$

③より, $y=1$のとき $x=0$,
$y=-1$のとき $x=-2$.

よって,求める複素数は,
$$z=i,\ -2-i.$$

(3) $\alpha=i$, $\beta=-2-i$
よって $M(-1)$.



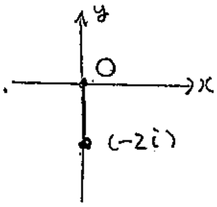
線分AM上の
複素数を

$$z=(1-t)(-1)+ti=t-1+ti$$
$$(0\leqq t\leqq 1)$$

とおくと

$$w=(t-1+ti+1)^2-2i$$
$$=t^2(1+2i-1)-2i$$
$$=2(t^2-1)i$$

$0\leqq t\leqq 1$より,
$$-2\leqq 2(t^2-1)\leqq 0.$$

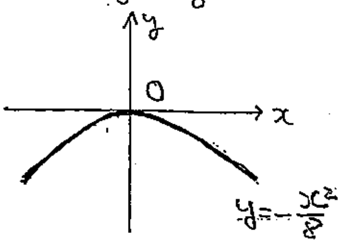


よって, wの描く図形は図の太線部分.

(4) Aを通り線分ABに垂直な直線上の点を
$$z=u+(-u+1)i \quad (u\text{は実数})$$
とおくと
$$w=\{u+1+(-u+1)i\}^2-2i$$
$$=(u+1)^2+2(-u^2+1)i-(-u+1)^2-2i$$
$$=4u-2u^2i$$

$w=x+yi$ (x, yは実数)
とおくと
$$x=4u,\ y=-2u^2.$$

uを消去して,
$$y=-\frac{x^2}{8} \quad (x\text{は任意の実数})$$



よって, wの描く図形は図の太線部分.

[5]

(1) $t>0$ より，

直線PAの傾き：$-\frac{3}{t}$．

直線PBの傾き：$\frac{1}{t}$．…①

よって，$\angle APB=90°$ となる条件は，

$$-\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1.$$

$$t^2=3.$$

$t>0$ より，

$$t=\sqrt{3}.$$

(2) ①より，直線ADの方程式は，

$$y=-tx+3 \quad \cdots ②$$

また，Pから直線ABに下ろした垂線の方程式は

$$y=0 \quad \cdots ③$$

②，③の交点がHであるから，②，③を連立させて，

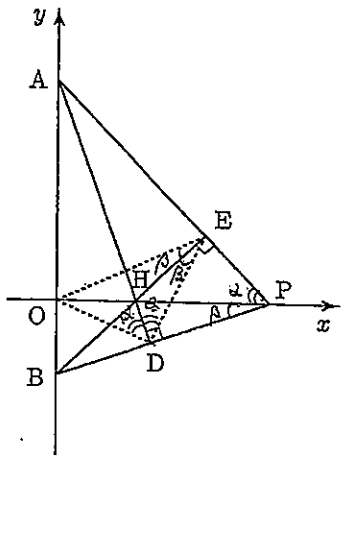
$$-tx+3=0$$

$$x=\frac{3}{t}.$$

したがって，

$$H\left(\frac{3}{t},\ 0\right).$$

(3)



$\angle APO=\alpha$，$\angle BPO=\beta$ とおく．

四角形PEHDは，

$$\angle PEH=\angle HDP=90°$$

より，円に内接する四角形であり，

$$\angle DEH=\angle DPH=\beta \ (\overset{\frown}{HD}\text{の円周角}) \cdots ④$$

また，四角形PEOBは，

$$\angle PEB=\angle POB=90°$$

より，円に内接する四角形であり，

$$\angle BPO=\angle BEO=\beta \ (\overset{\frown}{BO}\text{の円周角}) \cdots ⑤$$

$\angle DPH=\angle BPO$ だから，④，⑤より，

$$\angle DEH=\angle BEO=\beta$$

すなわち，$\angle DEH=\angle HEO=\beta$ …㊟

同様にして，

$$\angle ODH=\angle HDE=\alpha \quad \cdots ㊟㊟$$

㊟，㊟㊟より Hは △ODEにおいて

∠E，∠Dの二等分線の交点

であることがわかり，Hは△ODEの内心である．

（証明終り）

(4) 直線PBの方程式は，

$$y=\frac{1}{t}x-1. \quad \cdots ⑥$$

②と⑥を連立させて，

$$-tx+3=\frac{1}{t}x-1.$$

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)x=4.$$

$$x=\frac{4t}{t^2+1}.$$

②より，

$$y=\frac{-t^2+3}{t^2+1}.$$

よって，

$$D\left(\frac{4t}{t^2+1},\ \frac{-t^2+3}{t^2+1}\right)$$

よって，直線 OD の方程式は，

$$y = \frac{-t^2+3}{4t}x$$

すなわち，

$$(3-t^2)x - 4ty = 0.$$

これと H$\left(\frac{3}{t}, 0\right)$ との距離が求める円の半径であるから，

$$f(t) = \frac{\left|\frac{3}{t}(3-t^2)\right|}{\sqrt{(3-t^2)^2+16t^2}}$$

$$= \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}.$$

$(t>\sqrt{3}$ より$)$

(5) $f(t) = 3\sqrt{\dfrac{(t^2-3)^2}{t^2\{(t^2-3)^2+16t^2\}}}$

ここで，$u = t^2-3$ とおくと，$u>0$.

$$f(t) = 3\sqrt{\frac{u^2}{(u+3)\{u^2+16(u+3)\}}}$$

$g(u) = \dfrac{u^2}{(u+3)\{u^2+16(u+3)\}}$ とおく.

$$g(u) = \frac{u^2}{u^2(u+3)+16(u+3)^2}$$

$$= \frac{u^2}{u^3+19u^2+96u+144}.$$

よって，

$$g'(u) = \frac{2u(u^3+19u^2+96u+144)}{(u^3+19u^2+96u+144)^2} - \frac{u^2(3u^2+38u+96)}{(u^3+19u^2+96u+144)^2}$$

$$g'(u) = \frac{-u^4+96u^2+288u}{(u^3+19u^2+96u+144)^2}$$

$$= \frac{u(-u^3+96u+288)}{(u^3+19u^2+96u+144)^2}$$

さらに，$h(u) = -u^3+96u+288$ とおくと，$g'(u)$ において，

$\dfrac{u}{(u^3+19u^2+96u+144)^2}$ はつねに正

だから，$g'(u)$ の符号と $h(u)$ の符号は一致する.

$$h'(u) = -3u^2+96$$
$$= -3(u^2-32)$$
$$= -3(u+4\sqrt{2})(u-4\sqrt{2})$$

u	(0)	$\cdots$	$4\sqrt{2}$	$\cdots$	(∞)
$h'(u)$		$+$	0	$-$	
$h(u)$	(288)	$\nearrow$		$\searrow$	$(-\infty)$

よって，$h(\gamma)=0$，$\gamma>0$

となる γ がただ1つ存在し，

その前後で $h(u)$ の符号は正から負に変化する。

したがって，$u>0$ において，

$g'(u)$ も $u=\gamma$ の前後で正から負に変化し，$g(\gamma)$ は，極大かつ最大である.

よって，$g(u)$ は最大値をもつから，$f(t)$ も最大値をもつ.

（証明終り）