浜松医科大学　（前期）1 / 5

医学部（医学科）

1

(1)(a)　$n \geqq 3$ のとき，二項定理より，

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k$$
$$={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k$$
$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k.$$

$x>0$ より，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k>0$であるから，

$$(1+x)^n>1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2.$$ (証明終り)

(b)　(a)で示した式より，

$$0<\frac{n}{(1+x)^n}<\frac{n}{1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2}.$$

$$0<\frac{n}{(1+x)^n}<\frac{1}{\frac{1}{n}+x+\frac{n-1}{2}x^2}.$$

$x>0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+x+\frac{n-1}{2}x^2\right)=\infty$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+x+\frac{n-1}{2}x^2}=0.$

よって，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+x)^n}$は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+x)^n}=0.$　…(答)

(2)(a)　与えられた漸化式の両辺を2^{n+1}倍し，

$$3\cdot 2^{n+1}a_{n+1}=2\cdot 2^n a_n+1.$$

$b_n=2^n a_n$ とおくと，$b_1=2a_1=2$ であり，

$3b_{n+1}=2b_n+1$　すなわち　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}.$

これを変形すると，$b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$ であるから，

$$b_n-1=(b_1-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$
$$b_n=1+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

したがって，

$$a_n=\frac{b_n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$ …(答)

(b)　$S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}na_n$ とおくと，

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left\{n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}.\quad\cdots①$$

ここで，$T_N(r)=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}nr^n$　$(r\neq 1)$ とおくと，

$$T_N(r)=r+2r^2+3r^3+\cdots+Nr^N.\quad\cdots②$$
$$rT_N(r)=\qquad r^2+2r^3+\cdots+(N-1)r^N+Nr^{N+1}.\quad\cdots③$$

②－③より，

$$(1-r)T_N(r)=r+r^2+\cdots+r^N-Nr^{N+1}$$
$$=\frac{r(1-r^N)}{1-r}-Nr^{N+1}$$
$$=\frac{r-r^{N+1}(1+N-Nr)}{1-r}.$$

よって，

$$T_N(r)=\frac{r-r^{N+1}(1+N-Nr)}{(1-r)^2}.$$

①より，

$$S_N=T_N\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}T_N\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(1+\frac{N}{2}\right)}{\frac{1}{4}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(1+\frac{2N}{3}\right)}{\frac{4}{9}}$$
$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^N(2+N)+\frac{3}{2}\cdot\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^N(3+2N)}{4}$$
$$=\frac{25}{8}-2\left(\frac{1}{2}\right)^N-\frac{N}{2^N}-\frac{9}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^N-\frac{3}{4}\cdot\frac{N}{3^N}.$$

(1)より，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{N}{2^N}=0,\ \lim_{N\to\infty}\frac{N}{3^N}=0$ であるから，

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{25}{8}.$$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ は収束し，その和は

$$\frac{25}{8}.$$ …(答)

医学部（医学科）

2

(1)　$f(x)=x-\sin x$ とおく．

$f'(x)=1-\cos x \geqq 0$ より，$f(x)$ は単調に増加する．

よって，$x>0$ のとき

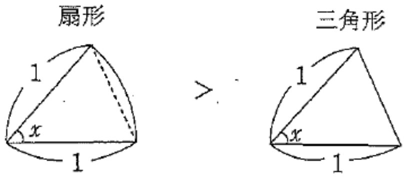
$$f(x)>f(0)\quad すなわち \quad x-\sin x>0$$

であるから，

$$x>\sin x. \qquad (証明終り)$$

別解　（$(\sin x)'$ を使わない解答）

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，面積について，



より，

$$\frac{1}{2}x>\frac{1}{2}\sin x$$

すなわち，

$$x>\sin x.$$

また，$x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x \leqq 1$，$1<x$ より，

$$x>\sin x.$$

以上より，$x>0$ において，

$$x>\sin x. \qquad (証明終り)$$

（(1)の別解終り）

(2)　$\dfrac{\pi}{18}>0$ であるから，(1)の結果を用いて，

$$\frac{\pi}{18}>\sin\frac{\pi}{18}\quad すなわち \quad \sin 10^\circ<\frac{\pi}{18}. \qquad \cdots①$$

ここで，$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ において $\theta=10^\circ$ とすると，

$$\sin 30^\circ=3\sin 10^\circ-4\sin^3 10^\circ.$$

$$\frac{1}{2}+4\sin^3 10^\circ=3\sin 10^\circ.$$

$$\sin 10^\circ=\frac{1}{6}+\frac{4}{3}\sin^3 10^\circ>\frac{1}{6}. \qquad \cdots②$$

（$\sin 10^\circ>0$ より）

①，②より，

$$\frac{1}{6}<\sin 10^\circ<\frac{\pi}{18}. \qquad (証明終り)$$

医学部（医学科）

3

$$f(a)f(b-c)+f(b)f(c-a)+f(c)f(a-b)=0. \quad \cdots(*)$$

(1)　まず，$(*)$ で $a=b=c=0$ として，

$$3\{f(0)\}^2=0 \quad より \quad f(0)=0$$

であることに注意する．

次に，すべての実数 x に対して

$$f(-x)=-f(x) \quad \cdots①$$

が成り立つことを証明する．

$(*)$ で $a=0$，$b=c=x_0$ とすれば，

$$f(x_0)\{f(x_0)+f(-x_0)\}=0.$$

- $f(x_0)\neq 0$ のときは，$f(-x_0)=-f(x_0)$．
- $f(x_0)=0$ のときは，$(*)$ で $a=0$，$b=c=-x_0$ として，

$$\{f(0)\}^2+\{f(-x_0)\}^2+f(-x_0)f(x_0)=0$$

より $f(-x_0)=0$ となるので，① が成り立つ．

以上より，すべての実数 x に対して ① は成り立つ．

（証明終り）

(2)　まず，$(*)$ において，

$$a=\frac{n+1}{2}y,\quad b=x+(n+1)y,\quad c=\frac{n+2}{2}y$$

とおくと，

$$f\left(\frac{n+1}{2}y\right)f\left(x+\frac{n}{2}y\right)+f(x+(n+1)y)f\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$+f\left(\frac{n+2}{2}y\right)f\left(-x-\frac{n+1}{2}y\right)=0$$

が成り立つ．これは ① を用いると

$$f\left(x+\frac{n}{2}y\right)f\left(\frac{n+1}{2}y\right)+f\left(\frac{y}{2}\right)f(x+(n+1)y)$$
$$=f\left(x+\frac{n+1}{2}y\right)f\left(\frac{n+2}{2}y\right) \quad \cdots②$$

と変形される．

これを用いて，等式

$$f\left(\frac{y}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}f(x+ky)=f\left(x+\frac{n}{2}y\right)f\left(\frac{n+1}{2}y\right) \quad \cdots(\sharp)$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で証明する．

[1] $n=0$ のとき $(\sharp)$ の両辺はともに $f(x)f\left(\frac{y}{2}\right)$ となるので，$(\sharp)$ は成り立つ．

[2] $n=m$ のとき $(\sharp)$ が成り立つとすると，

$$f\left(\frac{y}{2}\right)\sum_{k=0}^{m}f(x+ky)=f\left(x+\frac{m}{2}y\right)f\left(\frac{m+1}{2}y\right).$$

このとき，

$$f\left(\frac{y}{2}\right)\sum_{k=0}^{m+1}f(x+ky)$$
$$=f\left(\frac{y}{2}\right)\left\{\sum_{k=0}^{m}f(x+ky)+f(x+(m+1)y)\right\}$$
$$=f\left(x+\frac{m}{2}y\right)f\left(\frac{m+1}{2}y\right)+f\left(\frac{y}{2}\right)f(x+(m+1)y)$$

（帰納法の仮定を用いた）

$$=f\left(x+\frac{m+1}{2}y\right)f\left(\frac{m+2}{2}y\right) \quad （②より）$$

となり，$n=m+1$ のときも $(\sharp)$ は成り立つ．

[1], [2] より，0 以上のすべての整数 n に対して $(\sharp)$ が成り立つ．

（証明終り）

(3)　$s=t$ のときは $f(0)=0$ より与えられた等式は成り立つので，以下 $s\neq t$ のときを考える．

$s<t$ のときは，(2) の等式で $x=s$，$y=\frac{t-s}{n}$ とおくと，

$$f\left(\frac{t-s}{2n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(s+(t-s)\cdot\frac{k}{n}\right)$$
$$=f\left(\frac{s+t}{2}\right)f\left(\frac{t-s}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right). \quad \cdots③$$

③ の左辺は

$$\frac{f\left(\frac{t-s}{2n}\right)}{\frac{t-s}{2n}}\cdot\frac{t-s}{2n}\sum_{k=0}^{n}f\left(s+(t-s)\cdot\frac{k}{n}\right)$$

となり，$n\to\infty$ とすると，

$$\frac{t-s}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(s+(t-s)\cdot\frac{k}{n}\right)\to\int_s^t f(x)\,dx$$

である．

一方，$f(0)=0$，$f'(0)=1$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$$

であるから，$n\to\infty$ として $\dfrac{f\left(\frac{t-s}{2n}\right)}{\frac{t-s}{2n}}\to 1$ である．

医学部（医学科）

3の解答続き

よって，③ の両辺で $n \to \infty$ とすれば

$$f\left(\frac{t+s}{2}\right)f\left(\frac{t-s}{2}\right)=\frac{1}{2}\Big[F(x)\Big]_s^t=\frac{F(t)-F(s)}{2}$$

となり，与えられた等式は成り立つ.

$s>t$ のときは，$x=s,\ y=\dfrac{s-t}{n}$ として同様に計算すると

$$f\left(\frac{t+s}{2}\right)f\left(\frac{s-t}{2}\right)=\frac{F(s)-F(t)}{2}$$

となり，両辺を -1 倍して (1) の結果を用いると，与えられた等式を得る.　　　　(証明終り)

医学部（医学科）

4

3点(0, 0), (a, b), (c, d) が同一直線上にあるための必要十分条件は, $ad-bc=0$ である.

A, B が空でない事象であるとき,

「点 O(0, 0), 点 Q$(P(A\cap B), P(A\cap\overline{B}))$,
点 R$(P(\overline{A}\cap B), P(\overline{A}\cap\overline{B}))$ は同一直線上にある」

$\Leftrightarrow P(A\cap B)P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B})P(\overline{A}\cap B)=0$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)\{1-P(A\cup B)\}$
$\qquad -\{P(A)-P(A\cap B)\}\{P(B)-P(A\cap B)\}=0$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)\{1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)\}$
$\qquad -\{P(A)-P(A\cap B)\}\{P(B)-P(A\cap B)\}=0$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)-P(A)P(B)=0$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow$「A, B は独立である」

よって, 2つの条件 p, q が同値であることが示された.

(証明終り)