数学

岐阜大学　（前期）

教育学部（ロ）、工学部、医学部（医学科）

1

(1) $N=720$ となるのは，$\{a, b, c, d\}=\{6, 6, 5, 4\}$ のときに限る．

よって，求める確率は $\dfrac{\frac{4!}{2!}}{6^4}=\dfrac{12}{6^4}=\dfrac{1}{108}$．…(答)

(2) $N=360$ となるのは，$\{a, b, c, d\}=\{6, 6, 5, 2\}$，$\{6, 5, 4, 3\}$ のときに限る．

よって，求める確率は $\dfrac{\frac{4!}{2!}+4!}{6^4}=\dfrac{36}{6^4}=\dfrac{1}{36}$．…(答)

(3) $N>720$ となるのは，

$\{a, b, c, d\}=\{6, 6, 6, 6\}$，$\{6, 6, 6, 5\}$，$\{6, 6, 6, 4\}$，$\{6, 6, 5, 5\}$，$\{6, 5, 5, 5\}$

のときに限る．

よって求める確率は $\dfrac{1+4+4+\frac{4!}{2!2!}+4}{6^4}=\dfrac{19}{1296}$．…(答)

(1)の解答において，

$\{a, b, c, d\}=\{6, 6, 5, 4\}$ は　6の目が2回，5の目が1回，4の目が1回出たことを意味するものとする．

(2)，(3)についても同様である．

岐阜大学　（前期）

教育学部（ロ）、工学部、医学部（医学科）

$\boxed{2}$ $0<p<q$ …①

(1) $\overrightarrow{AP}=(p,-5)$, $\overrightarrow{AQ}=(q,-3)$ であるから，①より

$$S=\frac{1}{2}|p\cdot(-3)-(-5)\cdot q|=\frac{1}{2}(-3p+5q). \quad \cdots(\text{答})$$

(2) (i) $\angle A=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=pq+15$ となり，①より不適.

(ii) $\angle P=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$.

$\overrightarrow{PA}=(-p,5)$, $\overrightarrow{PQ}=(q-p,2)$ であるから，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=p^2-pq+10$.

よって，$p^2-pq+10=0$. …②

(iii) $\angle Q=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QP}=0$.

$\overrightarrow{QA}=(-q,3)$, $\overrightarrow{QP}=(p-q,-2)$ であるから，

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QP}=q^2-pq-6$.

よって，$q^2-pq-6=0$. …③

(i)～(iii) より，求める条件は，

$$p^2-pq+10=0 \quad \text{または} \quad q^2-pq-6=0. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) (ア) $\angle P=90^\circ$ のとき.

①，② より，$q=p+\dfrac{10}{p}$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}\left\{-3p+5\left(p+\frac{10}{p}\right)\right\}=p+\frac{25}{p}.$$

相加平均・相乗平均の大小関係より，

$$p+\frac{25}{p}\geqq 2\sqrt{p\cdot\frac{25}{p}} \quad \text{であるから} \quad S\geqq 10.$$

（等号成立は $p=\dfrac{25}{p}$，すなわち $p=5$ のとき.
このとき，② より $q=7$ となり $0<p<q$ を満たす.）

よって，S の最小値は 10.

岐阜大学　（前期）

教育学部（ロ）、工学部、医学部（医学科）

$\boxed{2}$ (続き)

(イ) $\angle Q = 90^\circ$ のとき.

①, ③より $p = q - \dfrac{6}{q}$ であるから,

$S = \dfrac{1}{2}\left\{-3\left(q - \dfrac{6}{q}\right) + 5q\right\} = q + \dfrac{9}{q}$.

相加平均・相乗平均の大小関係より,

$q + \dfrac{9}{q} \geqq 2\sqrt{q \cdot \dfrac{9}{q}}$ であるから $S \geqq 6$.

(等号成立は $q = \dfrac{9}{q}$, すなわち $q = 3$ のとき.
このとき, ③より $p = 1$ となり $0 < p < q$ を満たす.)

よって, S の最小値は 6.

(ア), (イ)より, S の最小値は 6. …(答)

数学

岐阜大学　（前期）

教育学部（ロ）、工学部、医学部（医学科）

3

(1) $\alpha^2=\{\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})i\}^2$
$=2+2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})i-(3+2\sqrt{2})$
$=(-1-2\sqrt{2})+(4+2\sqrt{2})i$,
$\alpha^4=\{(-1-2\sqrt{2})+(4+2\sqrt{2})i\}^2$
$=(9+4\sqrt{2})+2(-12-10\sqrt{2})i-(24+16\sqrt{2})$
$=(-15-12\sqrt{2})+(-24-20\sqrt{2})i$

より，$\begin{cases}(\alpha^2\text{の実部})=-1-2\sqrt{2},\\(\alpha^2\text{の虚部})=4+2\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}(\alpha^4\text{の実部})=-15-12\sqrt{2},\\(\alpha^4\text{の虚部})=-24-20\sqrt{2}.\end{cases}$ …(答)

(2) $\alpha^4+2\alpha^2+16\alpha+17$
$=\{(-15-12\sqrt{2})+(-24-20\sqrt{2})i\}+2\{(-1-2\sqrt{2})+(4+2\sqrt{2})i\}+16\{\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})i\}+17=0$
より，$\alpha^4+2\alpha^2+16\alpha+17$ の実部と虚部の値はともに 0．…(答)

(3) $\overline{\alpha}=\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})i$ であり，$\alpha\neq\overline{\alpha}$ である．
よって，α と $\overline{\alpha}$ が2次方程式 $x^2+px+q=0$ の解となるとき，解と係数の関係より，
$\alpha+\overline{\alpha}=-p$，…①　$\alpha\overline{\alpha}=q$ …②
が成り立つ．
①より，$p=-(\alpha+\overline{\alpha})=-2\sqrt{2}$．…(答)
②より，$q=\alpha\overline{\alpha}=2+(1+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{2}$．…(答)

(4) $(x^2+px+q)(x^2+rx+s)=(x^2-2\sqrt{2}x+5+2\sqrt{2})(x^2+rx+s)$
$=x^4+(r-2\sqrt{2})x^3+(-2\sqrt{2}r+s+5+2\sqrt{2})x^2+\{(5+2\sqrt{2})r-2\sqrt{2}s\}x+(5+2\sqrt{2})s$
より，$x^4+2x^2+16x+17=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$ となるとき，
$$\begin{cases}r-2\sqrt{2}=0,\\-2\sqrt{2}r+s+5+2\sqrt{2}=2,\\(5+2\sqrt{2})r-2\sqrt{2}s=16,\\(5+2\sqrt{2})s=17\end{cases}$$
が成り立つ．よって，$r=2\sqrt{2}$，$s=5-2\sqrt{2}$．…(答)

(5) (4)の結果より，$x^2+rx+s=0$，すなわち，$x^2+2\sqrt{2}x+5-2\sqrt{2}=0$ を解くと，
$x=-\sqrt{2}\pm(-1+\sqrt{2})i$．
したがって，(＊)の解は，$x=\sqrt{2}\pm(1+\sqrt{2})i,\ -\sqrt{2}\pm(-1+\sqrt{2})i$．…(答)

数学

岐阜大学　（前期）

教育学部（ロ）、工学部、医学部（医学科）

4

(1) $g(t)=32t^3-16t+1$ とおく．$g'(t)=96t^2-16=16(6t^2-1)$ である．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	-15	↗	$1+\frac{16}{9}\sqrt{6}$	↘	$1-\frac{16}{9}\sqrt{6}$	↗	17

$g(-1)=-15<0$，$g\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=1+\frac{16}{9}\sqrt{6}>0$，$g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=1-\frac{16}{9}\sqrt{6}<0$，$g(1)=17>0$ であるから，

増減表より，$32t^3-16t+1=0$ は $-1\leqq t\leqq 1$ において 3つの異なる実数解を持つ．

（証明終り）

(2) $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x=4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)=(4\sin x-8\sin^3 x)\cos x$．（証明終り）

(3) $4\sin 4x+\sin x=4(4\sin x-8\sin^3 x)\cos x+\sin x=\sin x(16\cos x-32\sin^2 x\cos x+1)$

$=\sin x\{16\cos x-32(1-\cos^2 x)\cos x+1\}=\sin x(32\cos^3 x-16\cos x+1)$．

$32t^3-16t+1=0$ の異なる3つの実数解を a, b, c $(-1<a<b<c<1)$ とすると，

$4\sin 4x+\sin x=32\sin x(\cos x-a)(\cos x-b)(\cos x-c)$ と変形できる．

$\cos\alpha=a$, $\cos\beta=b$, $\cos\gamma=c$ $(0<\gamma<\beta<\alpha<\pi)$ とすると，方程式 $4\sin 4x+\sin x=0$，

すなわち $32\sin x(\cos x-a)(\cos x-b)(\cos x-c)=0$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における解は

$x=0, \gamma, \beta, \alpha, \pi$ の 5個である．・・・（答）

(4) $f(x)=\cos 4x+\cos x$ より $f'(x)=-4\sin 4x-\sin x=-32\sin x(\cos x-a)(\cos x-b)(\cos x-c)$．

x	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	β	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	

増減表より，$f(x)$ が極小となる x は $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲に 2つ ある．・・・（答）

数学

岐阜大学　（前期）

教育学部（ロ）、工学部、医学部（医学科）

$\boxed{5}$

(1) $f'(x)=e^{-2x}(5\sin x-5\cos x)=5\sqrt{2}e^{-2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

より，$f(x)$の増減は以下のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-\frac{5}{2}\pi}$	$\searrow$	$e^{-4\pi}$

ここで，$1-\sqrt{2}e^{-\frac{5}{2}\pi}=e^{-\frac{5}{2}\pi}(e^{\frac{5}{2}\pi}-\sqrt{2})>e^{-\frac{5}{2}\pi}(e-\sqrt{2})>0$．

ゆえに，　最大値 1，最小値 $-\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$．・・・（答）

(2) $(e^{-2x}\sin x)'=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x$，・・・①

$(e^{-2x}\cos x)'=-e^{-2x}\sin x-2e^{-2x}\cos x$．・・・②

ゆえに，

①×2 ＋ ②：$-5e^{-2x}\sin x=\{e^{-2x}(2\sin x+\cos x)\}'$，

① − ②×2：$5e^{-2x}\cos x=\{e^{-2x}(\sin x-2\cos x)\}'$．

よって、C_1, C_2を積分定数として、

$\int e^{-2x}\sin x\,dx=-\frac{1}{5}e^{-2x}(2\sin x+\cos x)+C_1$，・・・③

$\int e^{-2x}\cos x\,dx=\frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x-2\cos x)+C_2$．・・・④

ゆえに，③，④より

$$\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\int_0^{2\pi}e^{-2x}\cos x\,dx-3\int_0^{2\pi}e^{-2x}\sin x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x-2\cos x)+\frac{3}{5}e^{-2x}(2\sin x+\cos x)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\left[e^{-2x}\left(\frac{7}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{e^{-4\pi}-1}{5}．$$ ・・・（答）