

第 1 問

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1 \cdot \sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \sin x \\
 &= \frac{\sin x - x \cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\sin x \cos^2 x - x \cos x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{(\sin x \cos x - x) \cos x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{(\sin 2x - 2x) \cos x}{2 \sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

一般に $\theta > 0$ のとき, $\sin \theta < \theta$ が成り立つ (下記の注を参照).
 これを利用すると, $0 < x < \pi$ で $\sin 2x - 2x < 0$ であることがわかる.
 したがって, $f(x)$ について次の増減表を得る.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

… (答)

また,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1 \text{ から, } \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1 + 1 = 2.$$

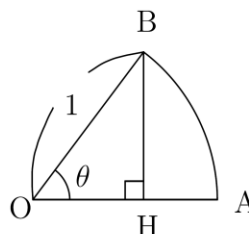
… (答)

一方, $0 < x < \pi$ において $\frac{x}{\sin x} > 0$ であり, $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \sin x = 0$ であるから,
 $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \frac{x}{\sin x} = \infty$ である. これと $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \cos x = -1$ より,
 $\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \infty$.

… (答)

(注) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき, 右図のように半径 1

の扇形 OAB において, $BH < \widehat{AB}$ であるから,
 $0 < \sin \theta < \theta$ が成り立つ.
 また, $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\frac{\pi}{2} > 1 \geq \sin \theta$ から,
 $\sin \theta < \theta$ である.
 したがって, $\theta > 0$ のとき, $\sin \theta < \theta$ である.



第 2 問

$$(1) \quad a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} = \frac{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}}{n!} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!n!}$$

であるから,

$$a_{n-1} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!(n-1)!}.$$

よって,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n+1)(2n)}{(n+1)n \cdot n} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}.$$

a, b を整数とし, a と b の最大公約数を (a, b) で表す. ユークリッドの互除法より,

$(2n+1, n) = (n, 1) = 1$ であるから, $2n+1$ と n は互いに素である.

$(2n+1, n+1) = (n+1, n) = (n, 1) = 1$ であるから, $2n+1$ と $n+1$ も互いに素である.

よって, $2n+1$ と $n(n+1)$ は互いに素である.

$n+1$ と n の一方は偶数なので, $\frac{n(n+1)}{2}$ は整数となり, $2n+1$ と $\frac{n(n+1)}{2}$ も互いに素である. よって,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

は既約分数となり,

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 2n+1. \quad \dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a_n &= \frac{q_n}{p_n} \cdot a_{n-1} \\ &= \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \cdot a_{n-2} \\ &= \dots \\ &= \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \times \dots \times \frac{q_3}{p_3} \cdot \frac{q_2}{p_2} \cdot a_1 \\ &= \frac{q_n \cdot q_{n-1} \times \dots \times q_3 \cdot q_2 \cdot a_1}{p_n \cdot p_{n-1} \times \dots \times p_3 \cdot p_2} \end{aligned}$$

となる. 分子は, $a_1 = 3$ を含めて, 奇数の積である. したがって, $n \geq 3$ のとき, 分母にある

$p_3 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ の素因数 2 が約分されて消えることはない. よって, $n \geq 3$ のとき a_n は整数にならない. $a_1 = 3$ と $a_2 = 5$ は整数であるから,

$$n = 1, 2. \quad \dots(\text{答})$$

第2問 (つづき)

〔(2)の(別解)〕

(1)の結果から

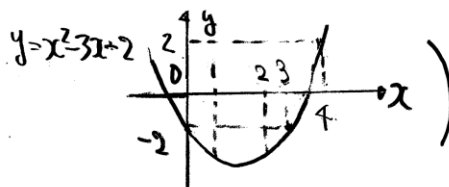
$$1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 - 3n - 2}{n(n+1)}$$

よって、 $n \geq 4$ のとき、 $1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} > 0$ 、すなわち $a_n < a_{n-1}$ 、

$2 \leq n \leq 3$ のとき、 $1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} < 0$ 、すなわち $a_n > a_{n-1}$ 。

(よって、 $y = x^2 - 3x - 2$ ($x > 0$) のグラフは
右図のようになるから。



よって、

$$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > a_8 > a_9 > \dots \quad (*)$$

よって、ここで、(1)の結果を用いると、

$$a_1 = \frac{3}{1^2} = 3, \quad a_2 = \frac{5 \cdot 4}{(2-1)^2} = 5, \quad a_3 = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{35}{6},$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{21}{4}, \quad a_5 = \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 6} a_4 = \frac{77}{20},$$

$$a_6 = \frac{2 \cdot 13}{6 \cdot 7} a_5 = \frac{143}{60}, \quad a_7 = \frac{2 \cdot 15}{7 \cdot 8} a_6 = \frac{143}{112} (> 1)$$

$$a_8 = \frac{2 \cdot 17}{8 \cdot 9} a_7 = \frac{2431}{4032} (< 1)$$

よって、(*)に注意すると

$n \geq 8$ のとき、 $0 < a_n < 1$ となり、 a_n は整数ではない、

$1 \leq n \leq 7$ においては、 a_1, a_2 のみが整数である。

よって、求める整数 n は、

$$n = 1, 2, \dots (*)$$

第 3 問

$P(a, a^2)$, $Q(b, 0)$ とおく ($-1 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$).

R が動く領域を T とおく.

条件より, $R(\frac{a}{k} + kb, \frac{1}{k}a^2)$ である.

$x = \frac{a}{k} + kb$, $y = \frac{1}{k}a^2$ とおくと, $y = k(x - kb)^2$ である.

$-1 \leq a \leq 1$ より, $-\frac{1}{k} + kb \leq x \leq \frac{1}{k} + kb$.

よって, b を固定すると, R は放物線の一部 $y = k(x - kb)^2$

$(-\frac{1}{k} + kb \leq x \leq \frac{1}{k} + kb)$ 上を動く.

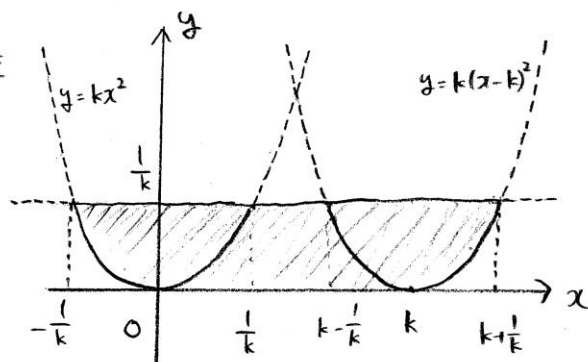
したがって, b を 0 以上 1 以下の範囲で

動かすと, T は $y = kx^2$ ($-\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}$) を x 軸の正の方向

に k 動かしたときに通過する領域と一致することが分かる.

① $\frac{1}{k} \leq k - \frac{1}{k}$ すなわち $k \geq \sqrt{2}$ のとき

T は右図の斜線部分
(境界を含む) である.



よって,

$$S(k) = \frac{1}{k} \left(k + \frac{2}{k}\right) - 2 \int_{-\frac{1}{k}}^0 kx^2 dx$$

$$= 1 + \frac{2}{k^2} - 2 \left[\frac{kx^3}{3} \right]_{-\frac{1}{k}}^0 = 1 + \frac{4}{3k^2}$$

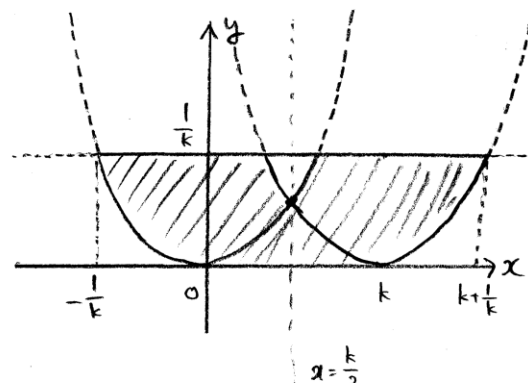
第3問 (つづき)

② $\frac{1}{k} > k - \frac{1}{k}$ すなわち $0 < k < \sqrt{2}$ のとき、

T は右図の斜線部分

(境界を含む) である。

T を右下図の A, B, C に分割する。



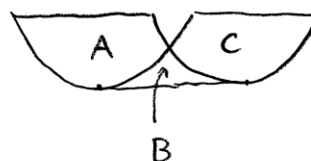
$0 \leq c \leq \frac{1}{k}$ なる実数を考える。

直線 $y=c$ と $A \cup B$ の共通部分は

長さ k の線分である。

よって $A \cup B$ の面積は $\int_0^{\frac{1}{k}} k \, dy = 1$

同様に、 $B \cup C$ の面積は 1。



よって、 $S(k) = 2 - (B \text{ の面積 })$ である。

放物線 $y = kx^2$ と $y = k(x-k)^2$ の交点の x 座標は $\frac{k}{2}$ であるため、

$$(B \text{ の面積 }) = 2 \int_0^{\frac{k}{2}} kx^2 \, dx = 2 \left[\frac{kx^3}{3} \right]_0^{\frac{k}{2}} = \frac{k^4}{12}$$

$$\text{よって、} S(k) = 2 - \frac{k^4}{12}$$

$$\text{①② より、} S(k) = \begin{cases} 2 - \frac{k^4}{12} & (0 < k < \sqrt{2}) \\ 1 + \frac{4}{3k^2} & (\sqrt{2} \leq k) \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

求める極限は、

$$\lim_{k \rightarrow +0} S(k) = \lim_{k \rightarrow +0} \left(2 - \frac{k^4}{12} \right) = 2 - 0 = 2 \quad \dots (\text{答})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3k^2} \right) = 1 + 0 = 1 \quad \dots (\text{答})$$

第 4 問

$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$
 よ、 $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$-a$	a
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow 2a^3$	$\searrow -2a^3 \nearrow$

よ、 $f(x)=b$ が異なる 3 実数解をもつための条件は

$$-2a^3 < b < 2a^3. \quad \dots ①$$

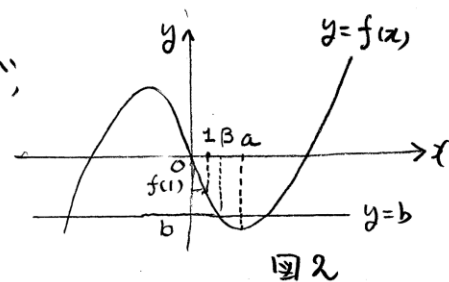
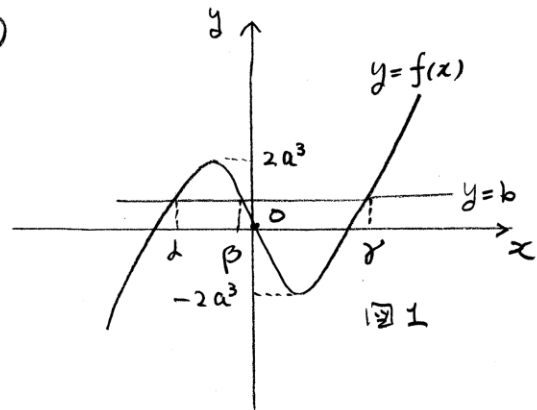
この時、3 解 α, β, γ は図 1 のようになる。

さらに $\beta > 1$ となるためには、 $b < 0$ が必要で、

その時、 $1 < \beta < a$ となるための条件は

$$f(1) > b \quad \text{かつ} \quad 1 < a,$$

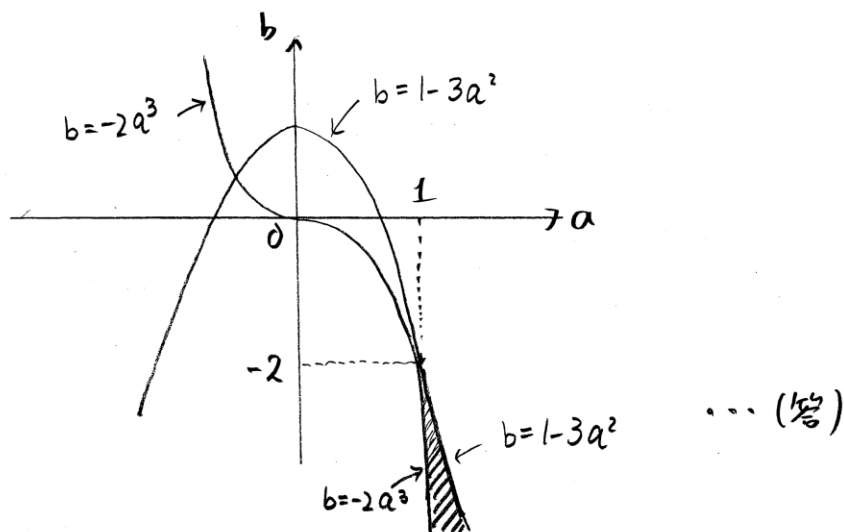
$$1 - 3a^2 > b \quad \text{かつ} \quad 1 < a \quad \dots ②$$



以上より、条件 1 と条件 2 を満たす (a, b) の条件は、

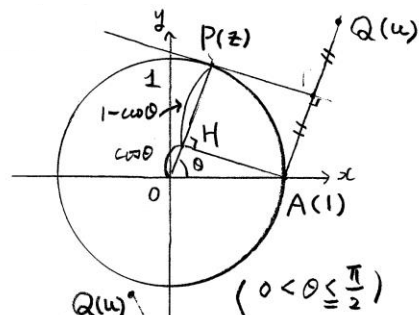
$$-2a^3 < b < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 1 - 3a^2 \quad \text{かつ} \quad 1 < a. \quad \dots (\text{答})$$

よ、図示すると次図の斜線部。(境界は含まない)。



第 5 問

(1)



左図のように直線 OP に点 A から
下した垂線を AH とおくと、
 $PH = 1 - \cos \theta$.
(θ は z の偏角, これは $-\pi \leq \theta \leq \pi$ で成り立つ.)

$$AQ \parallel OP, \quad AQ = 2PH$$

$$\therefore, \quad u = 1 + 2(1 - \cos \theta)z.$$

$$\cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (z \text{ の } z^*,$$

$$u = 1 + 2 \cdot \left(1 - \frac{z + \bar{z}}{2}\right)z.$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = 1 \text{ より } \bar{z} = \frac{1}{z} \text{ の } z^*,$$

$$u = 2z - z^2. \quad \dots (\text{答})$$

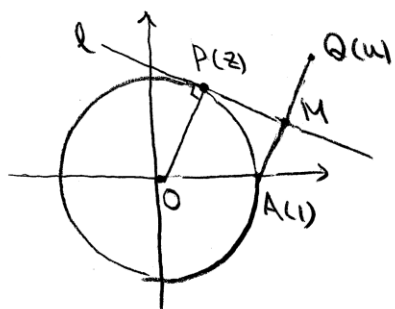
$$\omega = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-2z+z^2} = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

$$\therefore, \quad \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{(z-1)^2}{(\bar{z}-1)^2} = \frac{(z-1)^2}{(\frac{1}{z}-1)^2} = z^2. \quad \dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \frac{|\omega + \bar{\omega} - 1|}{|\omega|} &= \left| 1 + \frac{\bar{\omega}}{\omega} - \frac{1}{\omega} \right| \\ &= \left| 1 + z^2 - (z-1)^2 \right| \\ &= |2z| \\ &= 2. \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

第 5 問 (つづき)

〔(1) の (別解) 1 枚目〕



AQ の中点を $M\left(\frac{1+u}{2}\right)$ とし, また P における円の接線をもととする.

まず, M が l 上にある条件から

$$\angle OPM = 90^\circ,$$

ただし $z = -1$ のときも含む.

$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PM}$ にそれぞれ $z-0$ と $\frac{1+u}{2}-z$ を対応させ,

$$\alpha = \frac{\frac{1+u}{2}-z}{z-0} = \frac{1+u}{2z} - 1$$

とおくと, α は純虚数 または $\alpha = 0$, つまり

$$\alpha + \bar{\alpha} = 0$$

である (α の実部が 0). すなわち

$$\frac{1+u}{2z} - 1 + \frac{1+\bar{u}}{2\bar{z}} - 1 = 0.$$

各辺に $2z\bar{z}$ をかけて整理すると

$$(1+u)\bar{z} + (1+\bar{u})z = 4z\bar{z}.$$

$z\bar{z} = |z|^2 = 1$ であるから

$$\frac{1+u}{z} + (1+\bar{u})z = 4. \quad \dots \textcircled{1}$$

一方,

$$\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AQ}$$

でもある (注: $P \neq A$ としてゐるので $A \neq Q$).

第 5 問 (つづき 2)

〔 (1) の (別解) 2 枚目 〕

$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{AQ}$ にそれぞれ $z=0$ と $u=1$ を対応させ、

$$\alpha' = \frac{u-1}{z-0}$$

とおくと、 α' は実数、つまり

$$\alpha' - \overline{\alpha'} = 0$$

である (α' の虚部が 0)、つまり

$$\frac{u-1}{z} - \frac{\overline{u}-1}{\overline{z}} = 0.$$

$z\overline{z} = |z|^2 = 1$ を用いると

$$\frac{1-u}{z} - (1-\overline{u})z = 0. \quad \dots \textcircled{2}$$

①-② を作り、 $\overline{u}$ を消去して

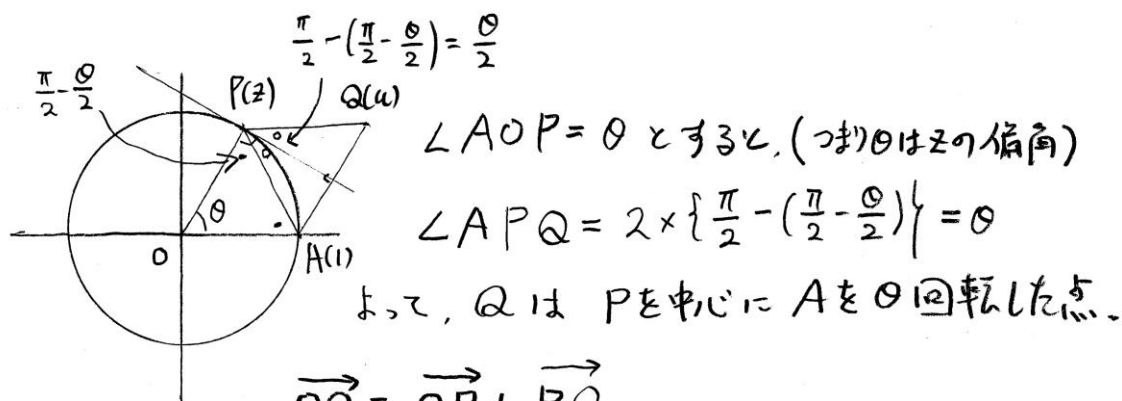
$$\frac{2u}{z} + 2z = 4.$$

$$\therefore u = 2z - z^2. \quad \dots \textcircled{\text{答}}$$

以下、 $\frac{\overline{w}}{w}$ を求めるところは 解答 1 と同じ.

第 5 問 (つづき 3)

〔 (1) の補足 〕



であり, $\vec{PQ}$ は P を中心に $\vec{PA}$ を θ 回転したベクトル.
 θ 回転は z をかける $= z$ で実現されるので,

$$u = z + (1-z)z = 2z - z^2.$$

第 5 問 (つづき 4)

(2) $W = x + yi$ (x, y は実数) とおくと、(1) より

$$\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|} = 2 \quad \text{となるので、}$$

$$|2x - 1| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} - y^2 \quad \text{--- ④}$$

となる

また、 $\arg(z - 1) = \theta$ とおくと、 z が C 上を動くとき θ は

$$\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$$

の範囲を動く。

$$\arg w = \arg\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)$$

$$= -\arg(z-1)^2$$

$$= -2\arg(z-1)$$

$$= -2\theta$$

となるので、 $-\frac{4}{3}\pi \leq -2\theta \leq -\frac{2}{3}\pi$ 。

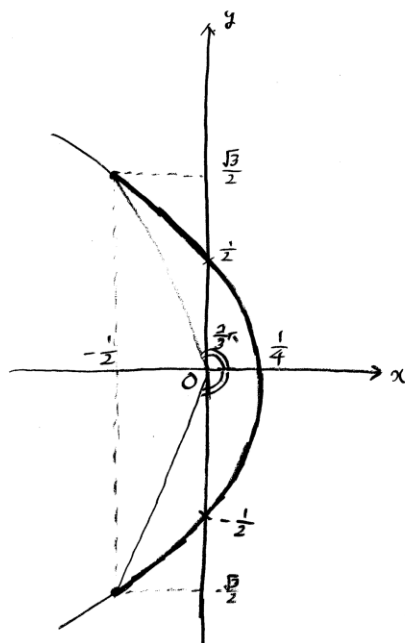
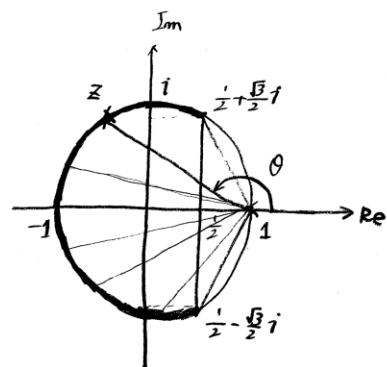
すなわち、 $\arg w$ の値域は $-\frac{2}{3}\pi \leq \arg w \leq \frac{2}{3}\pi$

となる。

よって、点 $R(w)$ の動く軌跡は放物線 ④ の
偏角が $-\frac{2}{3}\pi \leq \arg w \leq \frac{2}{3}\pi$ の部分となり、図示すると
右図の線部 となる。

(放物線 ④ の $\operatorname{Re}(w) \geq -\frac{1}{2}$ の部分を描く。)

--- (答)



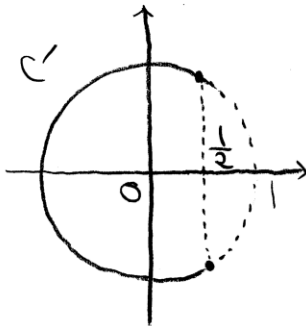
第 5 問 (つづき 5)

[(2) の (別解) 1 枚目]

(1) の解答の中で得る $w = \left(\frac{1}{z-1} \right)^2$ を

$$v = \frac{1}{z-1}, \quad w = v^2$$

のように分解する.



まず, 点 z が円弧 C' を動くときの
点 v の軌跡を求める.

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

であるから, C' 上に点 z がある条件は

$$\begin{cases} |z| = 1 & \cdots \text{①} \\ z + \bar{z} \leq 1 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

$v = \frac{1}{z-1}$ を z について解いた $z = 1 + \frac{1}{v}$ を代入すると

$$\begin{cases} \text{① から } \left| 1 + \frac{1}{v} \right| = 1. \quad \therefore |v+1| = |v|. & \cdots \text{③} \\ \text{②} \quad \left(1 + \frac{1}{v} \right) + \left(1 + \frac{1}{\bar{v}} \right) \leq 1. \quad \therefore \frac{1}{v} + \frac{1}{\bar{v}} \leq -1. \end{cases}$$

上記 2 式の後者の変形を進めて

$$\bar{v} + v \leq -|v|^2.$$

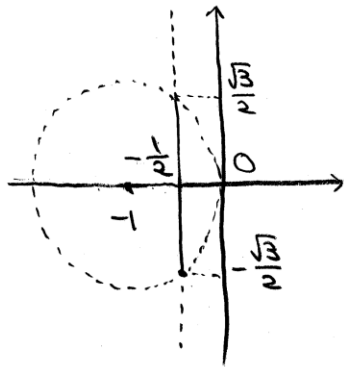
$$|v|^2 + v + \bar{v} \leq 0.$$

$$\therefore |v+1| \leq 1. \quad \cdots \text{④}$$

(注: ② の代りに $|z-1| \geq 1$ を用いてもよい).

第 5 問 (つづき 2)

〔(2) の (別解) 2 枚目〕



点 v の軌跡は 前ページの ③ の ④
で表される. それは左図のような
線分になる (注: ③ だけなら, 2 点
 $0, -1$ の垂直二等分線). したがって
$$v = -\frac{1}{2} + yi \quad (|y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2})$$

と表せる (i は虚数単位).

次に, このとき $w = v^2$ で定められる点 w の軌跡
を求める.

$$w = \left(-\frac{1}{2} + yi\right)^2 = \frac{1}{4} - y^2 - yi$$

であるから, $w = X + Yi$ (X, Y : 実数) とおくと

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4} - y^2, \\ Y = -y. \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} X = \frac{1}{4} - Y^2. \end{cases}$$

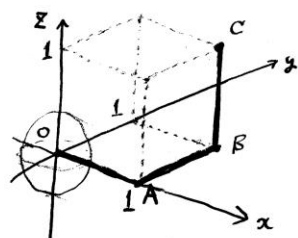
また y の範囲から $|y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから, 点 w の軌跡は

$$X = \frac{1}{4} - Y^2, \quad |Y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

で表される.

以下の図示は 解答 1 と同じ.

第 6 問



(1) V_1 は、 $-r \leq y \leq r$ の範囲に存在し、

V_3 は、 $1-r \leq y \leq 1+r$ の範囲に存在するので、

平面 $y=t$ が V_1 、 V_3 双方と交差点をもつような

t の値の範囲は、

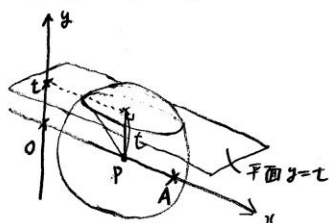


$1-r \leq t \leq r$, ... (答)

また、半径 r の球の中心が線分 OA 上にあるとき、その球の平面 $y=t$ における断面は、

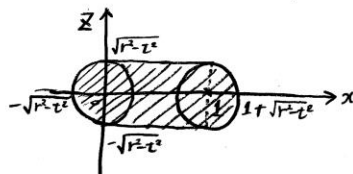
半径が $\sqrt{r^2 - t^2}$ の円となる。

(円の中心は、球の中心 P から平面 $y=t$ に下ろした垂線の足となる)



すると、平面 $y=t$ と V_1 の共通部分は下図斜線部分となる

(境界含む)



線分 BC と平面 $y=t$ との距離は、 $1-t$ となるので、同様にして、

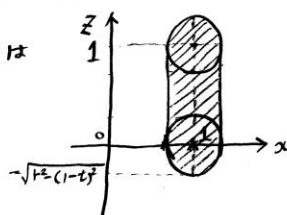
半径 r の球の中心が線分 BC 上にあるとき、その球の平面 $y=t$ における断面は、

半径が $\sqrt{r^2 - (1-t)^2}$ ($=\sqrt{r^2 - t^2 + 2t - 1}$) の円となる

(円の中心は、球の中心 P から平面 $y=t$ に下ろした垂線の足となる)

すると、平面 $y=t$ と V_3 との共通部分は

右図斜線部となる (境界含む)。



$\sqrt{r^2 - t^2}$ と $\sqrt{r^2 - (1-t)^2}$ との大小は

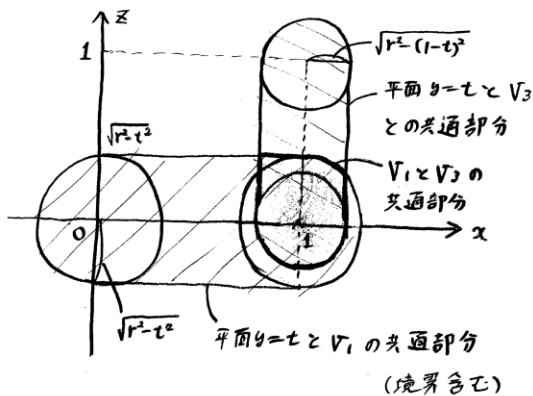
$$\begin{cases} \sqrt{r^2 - t^2} \geq \sqrt{r^2 - (1-t)^2} & (1-r \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ \sqrt{r^2 - t^2} \leq \sqrt{r^2 - (1-t)^2} & (\frac{1}{2} \leq t \leq r \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので、平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および、平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に

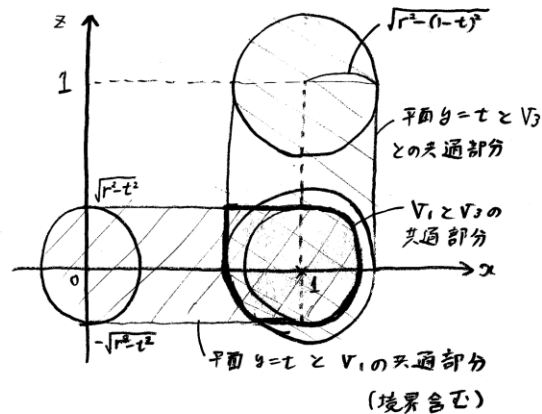
図示すると次のようになる

第 6 問 (つづき 2)

(I) $1-r \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき



(II) $\frac{1}{2} \leq t \leq r$ のとき



(2) V_1 と V_3 の共通部分は、(I) より、 $1-r \leq y \leq r$ の範囲に存在し、この範囲における平面 $y=t$

との断面が、常に V_2 に含まれればよい。以下、 y 座標はこの範囲で考える。

V_2 の平面 $y=t$ における切り口は $(1, t, 0)$ を中心とし、半径 r の円となる。

平面 $y=t$ において、 V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための

条件は、

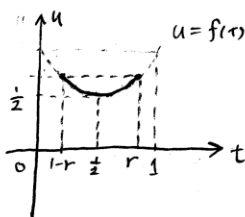
$$\sqrt{r^2 - t^2} + \sqrt{r^2 + (1-t)^2} \leq r$$

$$r^2 - t^2 + r^2 + (1-t)^2 \leq r^2$$

$$r^2 \leq t^2 + (1-t)^2 \quad \text{--- ④}$$

④ が、 $1-r \leq t \leq r$ をみたすすべての実数 t に対して成り立てばよい。

$f(t) = t^2 + (1-t)^2$ とおくと、 $f(t) = 2(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$ とわかるので、



求める条件は、

$$r^2 \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < r < 1$ とあわせて、求める r の条件は、

$$\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{--- (答)}$$

となる。

第 6 問 (つづき 3)

(3) V_1 の体積を $\text{vol}(V_1)$ などと表す。 $V_1 \cap V_3$ が V_2 に含まれることから

$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_3$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \text{vol}(V_1 \cup V_2 \cup V_3) \\ &= \text{vol}(V_1) + \text{vol}(V_2) + \text{vol}(V_3) - \text{vol}(V_1 \cap V_2) - \text{vol}(V_2 \cap V_3) - \text{vol}(V_1 \cap V_3) \\ &\quad + \text{vol}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \\ &= \text{vol}(V_1) + \text{vol}(V_2) + \text{vol}(V_3) - \text{vol}(V_1 \cap V_2) - \text{vol}(V_2 \cap V_3) \end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで、 $\triangle OAB$ と $\triangle ABC$ は合同であり、 $\triangle OAB$ を $\triangle ABC$ にうつす

合同変換によつて V_1, V_2 はそれぞれ V_2, V_3 にうつる。

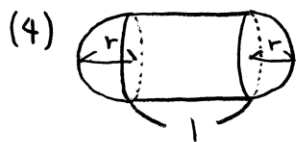
したがって、

$$\begin{aligned} \text{vol}(V_1) &= \text{vol}(V_2) = \text{vol}(V_3) = S, \\ \text{vol}(V_1 \cap V_2) &= \text{vol}(V_2 \cap V_3) = T \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上より $\text{vol}(V) = 3S - 2T$. --- (答)

第 6 問 (つづき 4)

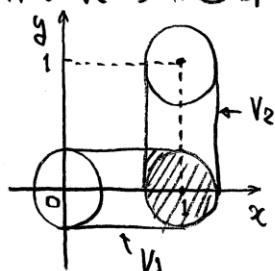


V_1 は半径 r の球の半分を 2 個と、
底面の半径が r 、高さが 1 の円柱を合わせた形
であるから、その体積は

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2} \times 2 + \pi r^2 \times 1$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \quad \dots (\text{答})$$

V_1 と V_2 の共通部分と平面 $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) の共通部分は



左図のようになる (3 つの円の半径はすべて $\sqrt{r^2 - t^2}$)。

これは 1 辺の長さが $\sqrt{r^2 - t^2}$ の正方形と

半径が $\sqrt{r^2 - t^2}$ 、中心角が $\frac{3}{2}\pi$ の扇型を合わせた形

であるから、その面積は

$$(\sqrt{r^2 - t^2})^2 + \pi (\sqrt{r^2 - t^2})^2 \cdot \frac{3}{4} = \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right) (r^2 - t^2)$$

に等しい。

したがって、 V_1 と V_2 の共通部分の体積は

$$T = \int_{-r}^r \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right) (r^2 - t^2) dt = \left(1 + \frac{3}{4}\pi\right) \left[r^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_{-r}^r = \left(\frac{4}{3} + \pi\right) r^3 \quad \dots (\text{答})$$

よって、 V の体積は (3) より

$$3S - 2T = 3 \left(\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2\right) - 2 \left(\frac{4}{3} + \pi\right) r^3$$

$$= \left(2\pi - \frac{8}{3}\right) r^3 + 3\pi r^2 \quad \dots (\text{答})$$

と求まる。