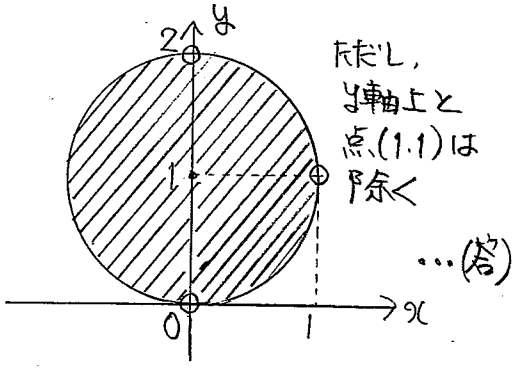
1

(1)
$$f(x)=ax^2$$
$$g(x)=b(x-1)^2+c$$
とおく。条件(ii)より C_1 と C_2 の接点の x 座標を t とすると，
$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$
すなわち
$$\begin{cases} at^2=b(t-1)^2+c & \cdots① \\ at=b(t-1) & \cdots② \end{cases}$$
①より
$$at^2=b(t-1)\cdot(t-1)+c$$
②を用いると
$$at^2=at(t-1)+c$$
$$at=c$$
$a\neq 0$ より，
$$t=\frac{c}{a}\cdots③$$
よって，C_1 と C_2 の接点の座標は，
$$\left(\frac{c}{a},\frac{c^2}{a}\right)\cdots(答)$$

(2)
$$x=\frac{c}{a},\ y=\frac{c^2}{a}$$ とおく．
$c\neq 0$ より，$x\neq 0$，$y\neq 0$ であり，
$$y=ax^2,\ y=cx$$
よって
$$a=\frac{y}{x^2},\ c=\frac{y}{x}\ \left(\begin{matrix}x\neq 0\\ y\neq 0\end{matrix}\right)\cdots④$$
このとき，a，c は 0 でない実数に定まる．条件(i)より
$$1+\frac{y^2}{x^2}\leqq\frac{2y}{x^2}$$
$$x^2+y^2\leqq 2y\ \left(\begin{matrix}x\neq 0\text{より}\\ x^2>0\end{matrix}\right)$$
$$x^2+(y-1)^2\leqq 1$$
また，②，③より
$$c=b\left(\frac{c}{a}-1\right)$$
$$ac=b(c-a)\cdots⑤$$
$c=a$ とすると⑤より $ac=0$ となり不適．よって $c\neq a$ であり⑤より
$$b=\frac{ac}{c-a}$$
となり，b は 0 でない実数に定まる．$a\neq c$ は ④より
$$\frac{y}{x^2}\neq\frac{y}{x}\quad\text{すなわち}$$
$$x\neq 1$$
と同値である．
以上から，C_1 と C_2 の接点が動く範囲は，
$$x^2+(y-1)^2\leqq 1$$
の $x\neq 0$，$y\neq 0$，$x\neq 1$ である部分。図示すると次図の斜線部分。



…(答)

2

$P = n^3 - 7n + 9$ とおく.

$P = n(n^2-7)+9$.

整数 n は, 整数 k を用いて,

$3k,\ 3k \pm 1$

のいずれかで必ず表される.

(i) $n = 3k$ のとき

n と 9 は 3 の倍数より,

P は 3 の倍数.

(ii) $n = 3k \pm 1$ のとき

$n^2 - 7 = (3k \pm 1)^2 - 7$

$= 3(3k^2 \pm 2k - 2)$.

(複号同順)

n^2-7 と 9 は 3 の倍数より

P は 3 の倍数.

(i) と (ii) から, P は すべての整数 n で 3 の倍数である.

素数のうち, 3 の倍数であるのは, 3 だけだから,

$P = 3$

となる n が求めるものであり,

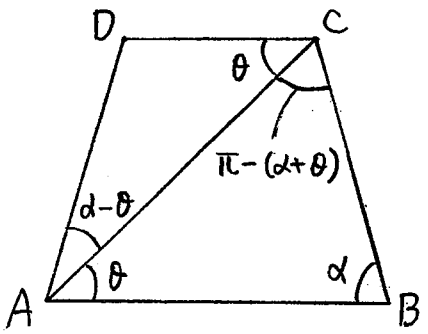
$n^3 - 7n + 9 = 3$

$n^3 - 7n + 6 = 0$

$(n-1)(n+3)(n-2) = 0$

$n = -3,\ 1,\ 2$ …(答)

3



$\angle CAB = \theta \quad (0<\theta<\alpha)$

とする.

$\angle CAD = \alpha - \theta,$

$\angle ACB = \pi - (\alpha+\theta).$

四角形ABCDは円に内接するので,

$\angle BCD = \pi - \alpha.$

よって

$$\angle ACD = \pi - \alpha - \{\pi - (\alpha+\theta)\} = \theta.$$

外接円の半径が1であることと,正弦定理より,

$$\frac{AB}{\sin\{\pi-(\alpha+\theta)\}} = \frac{BC}{\sin\theta} = \frac{CD}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{DA}{\sin\theta} = 2.$$

したがって,

$$AB = 2\sin(\alpha+\theta),$$
$$BC = 2\sin\theta,$$
$$CD = 2\sin(\alpha-\theta),$$
$$DA = 2\sin\theta.$$

$$k = AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA = 16\sin^2\theta\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta).$$

ここで,

$$\sin(\alpha+\theta)\sin(\alpha-\theta) = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\theta) = \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 2\alpha),$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

なので, $t = \cos 2\theta$ とおくと

$$k = 4(t-\cos 2\alpha)(1-t) = -4\left(t - \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}\right)^2 + (\cos 2\alpha - 1)^2.$$

θ が $0<\theta<\alpha$ を動くとき, t は $\cos 2\alpha < t < 1$ を動く.

このとき, k は

$$t = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

のとき, 最大値

$$(\cos 2\alpha - 1)^2 \left(= 4\sin^4\alpha\right) \cdots (答)$$

をとる.

4

$\alpha=1$, $\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\gamma=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とおく.

(i)より, $z_1=\alpha$ または $z_1=\beta$.

z_{k-1}の値	α	β	γ
表	β	γ	α
裏	α	γ	β

（z_kの値の表）

表より, z_nは α, β, γ 以外の値はとらない.

$z_n=\alpha, \beta, \gamma$ となる確率をそれぞれ, a_n, b_n, c_n とすると, 表より,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n, \quad \cdots ①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n. \quad \cdots ②$$

また,

$$a_n+b_n+c_n=1 \quad \cdots ③$$

が成り立つ.

$a_1=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{2}$ および①, ②より,

$$a_n=b_n. \quad \cdots ④$$

①, ③より,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n).$$

④より,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(1-a_n).$$

これを変形すると,

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right).$$

これより,

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

これと $a_1=\frac{1}{2}$ より,

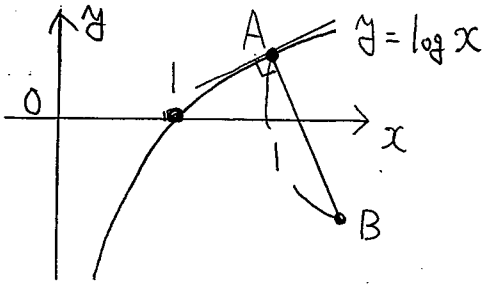
$$a_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad \cdots（答）$$

5 (1)



$y=\log x$ 上の点Aにおける接線の傾きは $y'=\frac{1}{x}$ より $\frac{1}{t}$ だから，法線の傾きは $-t$。

よって，

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$
$$=(t,\log t)+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}(1,-t)$$
$$=\left(t+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}},\ \log t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right).$$

ゆえに，点Bの座標は，

$$(u(t),v(t))$$
$$=\left(t+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}},\ \log t-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right).$$

…(答)

また，

$$\frac{du}{dt}=1-\frac{1}{2}(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2t)$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{t}+\frac{t^2}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

だから，

$$\left(\frac{du}{dt},\frac{dv}{dt}\right)$$
$$=\left(1-\frac{t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}},\ \frac{1}{t}-\frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}\right).$$

…(答)

(2)

$$\begin{cases} L_1(r)=\int_r^1\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt \\ L_2(r)=\int_r^1\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt \end{cases}$$

ここで，(1)より

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{t}\cdot\frac{du}{dt}$$

であり，$r\leqq t\leqq 1$ のとき，$\frac{du}{dt}\geqq 0$ だから，

$$L_2(r)=\int_r^1\frac{du}{dt}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt.$$

したがって，

$$L_1(r)-L_2(r)$$
$$=\int_r^1\left(1-\frac{du}{dt}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_r^1\frac{1}{t^2+1}\,dt.\quad\cdots①$$

ここで，$t=\tan\theta$ $\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ と置換すると，

t	$r\longrightarrow 1$
θ	$\theta_1\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$(\tan\theta_1=r)$

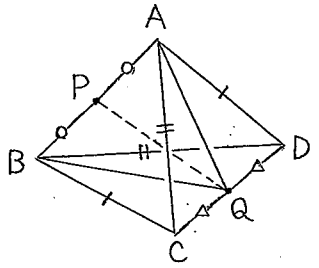
$$①=\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}-\theta_1.$$

よって，

$$\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\lim_{\theta_1\to+0}\left(\frac{\pi}{4}-\theta_1\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}.\quad\cdots(答)$$

6

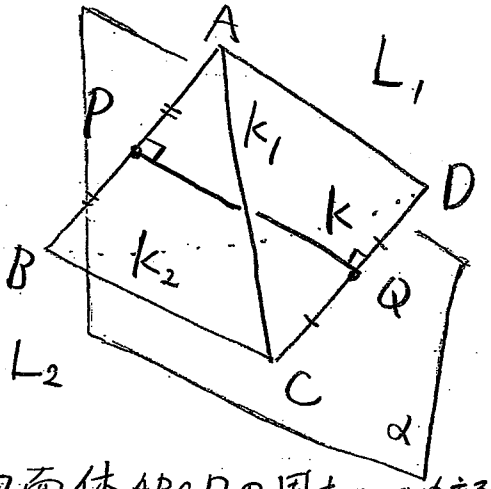
(1) AC=BD, AD=BC.



△ACD≡△BDC（3辺相等）より，△ACQ≡△BDQ（2辺夾角相等）であるから，AQ=BQ．三角形ABQは二等辺三角形だから，AB⊥PQ．

（証明終り）

(2) (1)より AB⊥PQ であり，同様にして，CD⊥PQ．



四面体ABCDの周および内部をk，平面αによって区切られる空間の領域をL_1, L_2とし

$k_1 = k \cap L_1$, $k_2 = k \cap L_2$

とする．

直線PQに関して180°回転させる操作をγとし，図形Sに操作γをしてできる図形をγ(S)と書くことにする．

γ(A)=B, γ(B)=A,

γ(C)=D, γ(D)=C

より，γ(k)=k

また，$\gamma(k_1) = \gamma(k \cap L_1)$

$= \gamma(k) \cap \gamma(L_1)$

$= k \cap L_2$

$= k_2$

γによって体積は変化しないので，

(k_1の体積)=(γ(k_1)の体積)

=(k_2の体積)．

以上より，示せた．（証明終り）

6

(1)の別解

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$
とおくと
$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$.

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

であり,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\vec{b}\cdot(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d})$$

ここで, 条件より,

$$AC=BD,\ AD=BC$$

であるから,

$$\begin{cases}|\vec{c}|^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2\\ |\vec{d}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2\end{cases}.$$

すなわち,

$$\begin{cases}|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}=0\\ |\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$

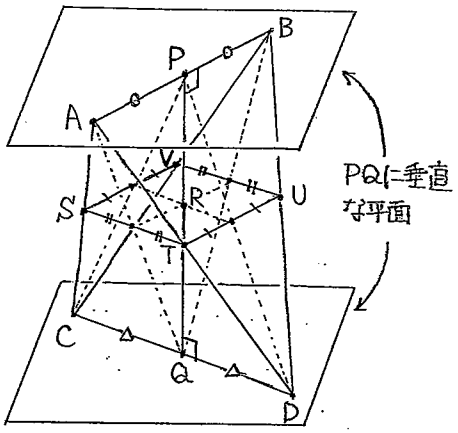
辺々加えて, 整理すると,

$$|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}=0$$

よって, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$
となり, $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$
であるから, 辺ABと線分PQは垂直である（証明終り）

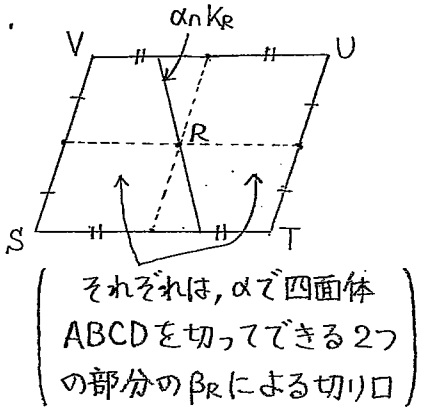
(2)の別解

(2) (1)と同様に, 二等辺三角形CDPに着目して, CD⊥PQ.



線分PQ（両端は除く）上の点Rを通り, PQに垂直な平面β_Rによる四面体ABCDの切り口は, 図の平行四辺形STUV（K_Rとする）であり, Rはその中心である.

線分PQを含む平面αによるK_Rの切り口はRを通る線分であり, 平行四辺形K_Rの面積を2等分する.



以上のことが線分PQ（両端は除く）上の各点Rに対していえるから, αで四面体ABCDを切ってできる2つの部分の体積は等しい.

（証明終り）