第1問

(1)
$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (b-3)\cos\theta - a \\
&= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a.
\end{aligned}
$$
…(答)

また,
$$
\begin{aligned}
f(\theta) - f(0) &= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a - (1+a+b) \\
&= 4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1
\end{aligned}
$$
であり, これを $\cos\theta - 1 = x - 1$ で割ると,
$$\text{商}: 4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1, \quad \text{余り}: 0$$
となる. したがって,
$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1} = 4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1.$$
…(答)

(2) $x = \cos\theta$ とおくとき, (1) の結果より,
$$g(\theta) = 4x^2 + (2a+4)x + 2a + b + 1$$
であり, これを $h(x)$ とおく. $0 < \theta < \pi$ つまり, $-1 < x < 1$ における $h(x)$ の最小値 m が 0 になるための a, b についての条件を求めればよい.
$$h(x) = 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + b$$
より, 放物線 $y = h(x)$ の軸の方程式は $x = -\dfrac{a+2}{4}$ である.

(i) $-\dfrac{a+2}{4} \leqq -1$, $1 \leqq -\dfrac{a+2}{4}$ つまり, $a \leqq -6$, $2 \leqq a$ のとき.

$-1 < x < 1$ は開区間であり, この区間で $h(x)$ は単調であるから, 最小値 m は存在しない.

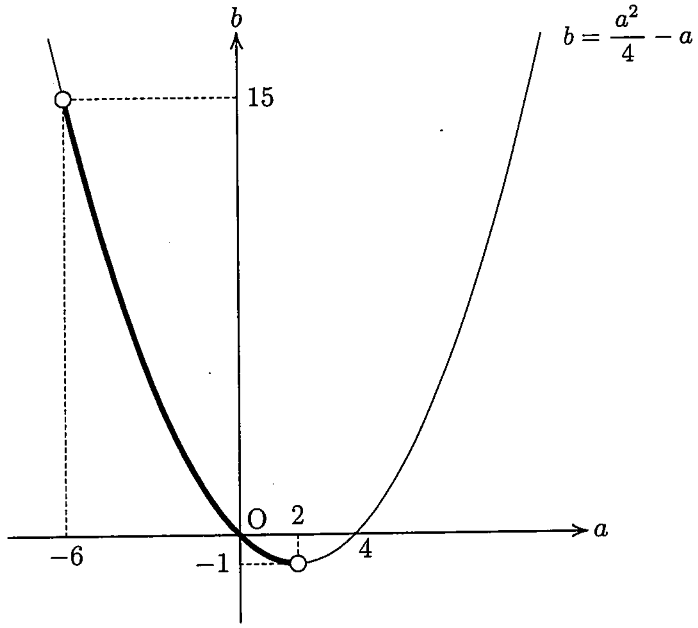
(ii) $-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$ つまり, $-6 < a < 2$ のとき.
$$m = h\left(-\frac{a+2}{4}\right) = -\frac{a^2}{4} + a + b.$$

第 1 問 (つづき)

以上, (i), (ii) より, 求める a, b についての条件は,

$$b = \frac{a^2}{4} - a \quad \text{かつ} \quad -6 < a < 2 \qquad \cdots(\text{答})$$

であり, この条件を満たす点 (a, b) が描く図形は次図の太線部である.



…(答)

第2問　（解答その1）

(1) 6秒後までに，(m,n) から $\begin{cases}(m+1,n)\text{ へ } a\text{ 回}\\(m,n-1)\text{ へ } b\text{ 回}\\(m-1,n)\text{ へ } c\text{ 回}\\(m,n+1)\text{ へ } d\text{ 回}\end{cases}$ 移動

したとすると，$a+b+c+d=6$ …① であり，

6秒後の点Pの位置は $(a-c,\ d-b)$．

よって，6秒後にPが直線 $y=x$ 上にある条件は

$$a-c=d-b.$$

つまり，$a+b=c+d$．…②

①と②から，

$$a+b=c+d=3.$$

そこで，(a,b,c,d) が，

$(3,0,3,0)$ となる確率は $\dfrac{{}_6C_3}{4^6}=\dfrac{5}{4^5}$．…③

$(3,0,2,1)$ 〃 $\dfrac{{}_6C_3\cdot{}_3C_2}{4^6}=\dfrac{15}{4^5}$．…④

$(2,1,2,1)$ 〃 $\dfrac{{}_6C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{4^6}=\dfrac{45}{4^5}$．…⑤

これより，

$\{a,b\}=\{c,d\}=\{3,0\}$ となるのは4通りあり，それぞれの確率は③．

$\{a,b\}=\{3,0\}$，$\{c,d\}=\{2,1\}$ となるのは4通りあり，それぞれの確率は④．

$\{a,b\}=\{2,1\}$，$\{c,d\}=\{3,0\}$ 〃 〃 〃 ④．

$\{a,b\}=\{c,d\}=\{2,1\}$ となるのは4通りあり，それぞれの確率は⑤．

よって求める確率は，

$$\left(\frac{5}{4^5}+\frac{15}{4^5}+\frac{15}{4^5}+\frac{45}{4^5}\right)\times4=\frac{80\times4}{4^5}=\frac{5}{16}.\quad\cdots(\text{答})$$

第2問　つづき

(2)　6秒後に原点Oにあるのは，$a=c$，$b=d$ の時．

$a+b+c+d=6$ なので，

(a,b,c,d) が

$(3,0,3,0)$　となる確率は③，つまり $\dfrac{5}{4^5}$．

$(0,3,0,3)$　〃　〃．

$(2,1,2,1)$　〃　は⑤，つまり $\dfrac{45}{4^5}$．

$(1,2,1,2)$　〃　〃．

よって，求める確率は

$$\left(\frac{5}{4^5}+\frac{45}{4^5}\right)\times 2=\frac{25}{256}．\quad\cdots(答)$$

第 2 問 （解答その 2）

(1)

ある時刻での点 P の座標 (x, y) に対して，$s = x - y$ を考える．規則 (a) より最初は $s = 0$ であり，点 P が格子点 (m, n) から格子点 $(m+1, n)$, $(m, n+1)$, $(m-1, n)$, $(m, n-1)$ に移動するとき，s の値はそれぞれ $+1$, -1, -1, $+1$ 変化することから，規則 (b) より，ある時刻の 1 秒後の s の値は，確率 $\frac{1}{2}$ で 1 増加または 1 減少する．

点 P が直線 $y = x$ 上にあることと $s = 0$ は同値であるから，求める確率は最初から 6 秒後に $s = 0$ となる確率であり，これは s が 3 回 1 増加し，3 回 1 減少することと同値である．したがって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{5}{16} \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(2)

ある時刻での点 P の座標 (x, y) に対して，$s = x - y$, $t = x + y$ を考える．(1) と同様に考えると，規則 (a) より最初は $(s, t) = (0, 0)$ であり，ある時刻の 1 秒後に (s, t) は $(s+1, t+1)$, $(s+1, t-1)$, $(s-1, t+1)$, $(s-1, t-1)$ にそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で変化する．

したがって，これを st 平面上の点 Q の移動と考えると，次のような試行と同じであることが分かる：

(a') 点 Q は最初原点 O にある．

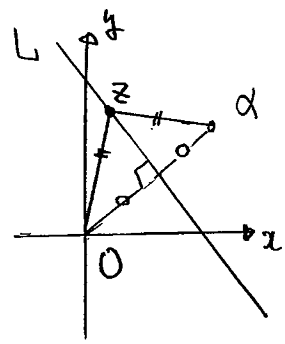
(b') ある時刻で点 Q が格子点 (s, t) にあるとするとき，その 1 秒後の点 Q の位置は $(s+u, t+v)$ とする．ただし，裏表が $\frac{1}{2}$ ずつの確率で出る 2 枚のコイン A, B を投げ，A が表なら $u = 1$, 裏なら $u = -1$ とし，B が表なら $v = 1$，裏なら $v = -1$ とする．

また，(x, y) が xy 平面上の原点 O にあることと，(s, t) が st 平面上の原点 O にあることは同値であるから，求める確率は，コイン A, B を 6 回ずつ投げて両方とも裏表が 3 回ずつ出る確率と同じであり，その値は

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6\mathrm{C}_3\right)^2 = \frac{25}{256} \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

第3問



$w=\dfrac{1}{z}$ のとき，$z=\dfrac{1}{w}$ ．$\cdots$ ㊍

(1) L上の点 z の条件式は，

$$|z-\alpha|=|z-0| \cdots ①$$

である．

㊍の z が ①をみたすので，

$$\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=\left|\frac{1}{w}-0\right|.$$

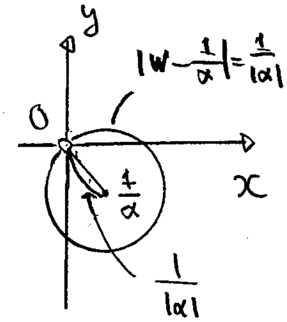
これは，$w\neq 0$ の下で次のように同値変形できる．

$$\left|\frac{1-\alpha w}{w}\right|=\left|\frac{1}{w}\right|$$

$$\iff |1-\alpha w|=1$$

$$\iff |\alpha|\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=1$$

$$\iff \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}. \cdots ②$$



よって，「②かつ $w\neq 0$」が w のみたす関係式，

つまり，w の軌跡は，

中心 $\dfrac{1}{\alpha}$，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ $\cdots$（答）

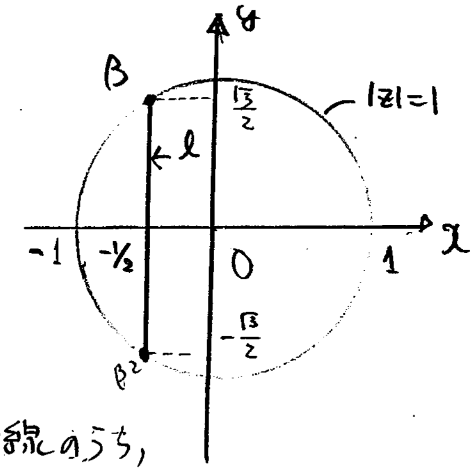
の円から，1点 O を除いたものである．

第3問 つづき.

(2) $x^3=1$ から, $x=1, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

よって, $\beta=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ で,

$$\beta^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



点 β と点 β^2 を結ぶ線分を l とすると,

l は,

「点 -1 と点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線のうち,

単位円の周および内部に含まれる部分」

である. つまり l 上の点 z の条件式は,

$$\begin{cases} |z+1|=|z-0| & \cdots③ \\ \text{かつ} & \\ |z|\leqq 1 & \cdots④ \end{cases}$$

である.

㊟の z が「③かつ④」をみたすので,

③から $|w+1|=1$ かつ $w\neq 0$. $\cdots$⑤ (1)から)

④から, $\left|\dfrac{1}{w}\right|\leqq 1$, すなわち $1\leqq |w|$. $\cdots$⑥

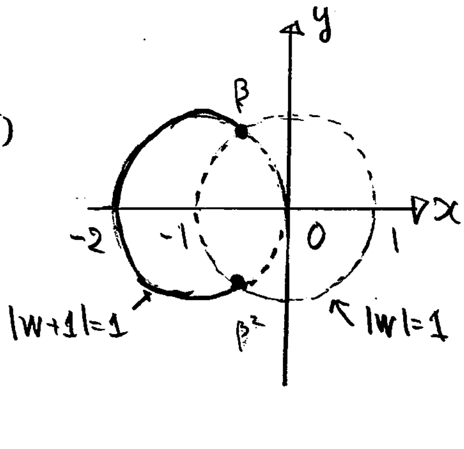
よって,「⑤かつ⑥」が w のみたす関係式.

つまり, w の軌跡は,

$|w+1|=1$ かつ $|w|\geqq 1$ $\cdots$(答)

で, これを複素数平面上に図示すると,

右図太線部になる.



(注)

例えば，(2)を成分表示して解くと次のようになる。

記号等は，解答と同じものとする。

・ $W=X+iY$, $z=x+iy$ (X, Y, x, y：実数) とおくと，

㊟は，
$$x+iy=\frac{1}{X+iY}=\frac{X}{X^2+Y^2}+\frac{-Y}{X^2+Y^2}i. \quad ((X,Y)\neq(0,0))$$

よって，
$$x=\frac{X}{X^2+Y^2},\ y=\frac{-Y}{X^2+Y^2}. \quad \cdots ⑦$$

線分 ℓ 上の点 $z=x+iy$ (x, y：実数) に対して，
$$x=-\frac{1}{2},\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，⑦より X, Y は
$$-\frac{1}{2}=\frac{X}{X^2+Y^2}\ \cdots ⑧,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{-Y}{X^2+Y^2}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots ⑨$$

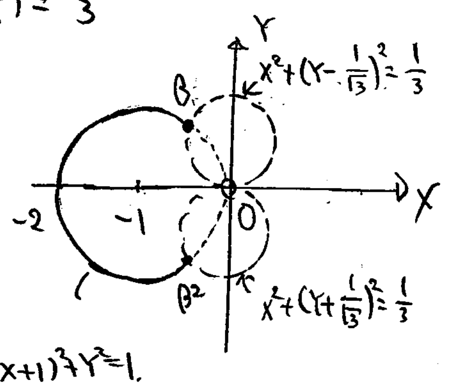
をみたす。$(X,Y)\neq(0,0)$ の下で，

⑧は，$(X+1)^2+Y^2=1$，

⑨は，$X^2+\left(Y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\geqq\frac{1}{3}$, $X^2+\left(Y+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\geqq\frac{1}{3}$

と変形できる。

$(X,Y)\neq(0,0)$ の下で，これを図示して，
$W=X+iY$ の軌跡（右図太線部）
が得られる。



第４問

(1)　$q=-\dfrac{1}{p}$ とおくと，$q=2-\sqrt{5}$ であり，

$$a_n=p^n+q^n.$$

これより，

$$a_1=p+q=4. \quad \cdots(\text{答})$$
$$a_2=p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=18. \quad \cdots(\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} a_1a_n&=(p+q)(p^n+q^n)\\ &=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})\\ &=a_{n+1}-a_{n-1} \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3)　n に関する数学的帰納法で示す．

（Ⅰ）$n=1$，２のとき，(1)より a_1，a_2 は自然数であるから，成り立つ．

（Ⅱ）$n=k$，$k+1$ (k：自然数) のとき成り立つと仮定する．このとき，(2)より

$$a_{k+2}=a_1a_{k+1}+a_k$$

であるから，$n=k+2$ も自然数である．

以上（Ⅰ），（Ⅱ）より，a_n は自然数である．　　（証明終り）

(4)　一般に，

$$a=bq+c \quad (a,\ b,\ c：\text{自然数},\ q：\text{整数})$$

であるとき，

$$\gcd(a,\ b)=\gcd(b,\ c)$$

である(ユークリッドの互除法)．ただし，a，b の最大公約数を $\gcd(a,\ b)$ と表す．

いま，(2)によると

$$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}$$

より，上記のことから，

$$\gcd(a_{n+1},\ a_n)=\gcd(a_n,\ a_{n-1}).$$

これをくりかえして，

$$\begin{aligned} \gcd(a_{n+1},\ a_n)&=\gcd(a_n,\ a_{n-1})\\ &=\gcd(a_{n-1},\ a_{n-2})\\ &=\cdots\\ &=\gcd(a_2,\ a_1)\\ &=2 \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

第５問

(1)

$$(x^2+k)'=2x$$

より，C の接点を $\mathrm{T}(t,\ t^2+k)$ とすると，

$$2t=a,$$

$$t=\frac{a}{2}.$$

よって，T での接線 l の方程式は，

$$y=a\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{a^2}{4}+k,$$

$$y=ax-\frac{a^2}{4}+k.\quad\cdots①$$

ここに D の方程式を代入して x を消去すると，

$$y=a(y^2+k)-\frac{a^2}{4}+k,$$

$$ay^2-y+ak-\frac{a^2}{4}+k=0.$$

l は D にも接するので，l の傾き a は $a\neq 0$ であり，この y の２次方程式の判別式は０であるから，

$$1-4a\left(ak-\frac{a^2}{4}+k\right)=0,$$

$$4a(a+1)k-a^3-1=0,$$

$$(a+1)(4ak-a^2+a-1)=0.\quad\cdots②$$

(1)では $a\neq -1$ より，

$$4ak-a^2+a-1=0,$$

$$k=\frac{a^2-a+1}{4a}.\quad\cdots(答)\quad\cdots③$$

これより，①で表される直線 l の y 切片 b は，

$$b=-\frac{a^2}{4}+k\quad\cdots④$$

$$=\frac{-a^3+a^2-a+1}{4a}.\quad\cdots(答)$$

(2)　③で $a=2$ として，

$$k=\frac{3}{8}.$$

このとき，②は

$$(a+1)(a-2)\left(a-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$a=-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$$

であるから，これらを④に代入することで，求める傾きとy切片の組は,

$$\left(-1,\ \frac{1}{8}\right),\ \left(2,\ -\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right).\qquad \cdots(答)$$

【(1)別解】

Cの接点を$\mathrm{T}(t,\ t^2+k)$，Dの接点を$\mathrm{S}(s^2+k,\ s)$とおくとき，明らかに$s\neq 0$である.

$$(x^2+k)'=2x$$

より，Tでの接線の方程式は,

$$y=2t(x-t)+t^2+k,$$
$$y=2tx-t^2+k.\quad \cdots ①$$

同様に，Sでの接線の方程式は,

$$x=2sy-s^2+k,$$
$$y=\frac{1}{2s}x+\frac{s^2-k}{2s}.\quad \cdots ②$$

①，②がどちらも$y=ax+b$に一致するので,

$$2t=\frac{1}{2s}=a,\qquad \cdots ③$$

$$-t^2+k=\frac{s^2-k}{2s}=b.\qquad \cdots ④$$

③より,

$$t=\frac{a}{2},\ s=\frac{1}{2a}$$

であるから，④に代入して,

$$-\frac{a^2}{4}+k=a\left(\frac{1}{4a^2}-k\right),$$
$$(a+1)(4ak-a^2+a-1)=0.$$

$a\neq -1$であるから,

$$4ak-a^2+a-1=0,$$

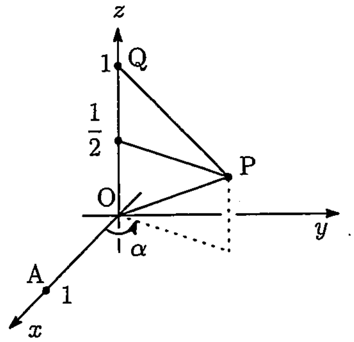
$$k=\frac{a^2-a+1}{4a}. \qquad \cdots(答)$$

④より，

$$b=-\frac{a^2}{4}+k=\frac{-a^3+a^2-a+1}{4a}. \qquad \cdots(答)$$

【(2)補足】　2 曲線 C，D は直線 $y=x$ に関して対称であるから，直線 $y=ax+b$ が共通接線であるとき，直線 $x=ay+b$ も共通接線である．特に，傾き $a=2$ のときは，これらは異なる 2 直線である．また，C には傾きが -1 の接線が存在し，この直線は直線 $y=x$ に関して対称であるから，D にも接する．これより，傾きが 2 の共通接線が存在するのであれば，共通接線が少なくとも 3 本存在することがわかる．

第 6 問



(1)　P(X,Y,Z) とおくと, 図の角 α $(0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ)$

により, $\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \\ Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \\ Z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ とおける.

よって,
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq X \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cos\theta$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right|\cos\theta$$

$\iff X = 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta.$

よって, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より,
$$30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　Q$(0,0,1)$ のとき, 辺 OP の通過領域は円錐の側面である. それを C とおく. まず, C 上の点の満たす式を求める.

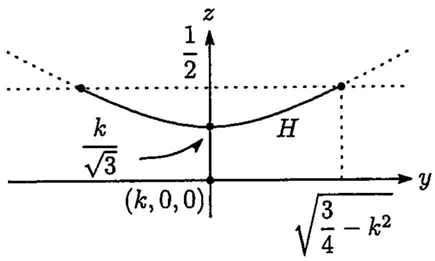
辺 OP 上の点 (x,y,z) は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす t を用いて, $\left(\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)t, \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)t, \dfrac{t}{2}\right)$ とおける.

よって
$$x^2+y^2 = \frac{3}{4}t^2 = \frac{3}{4}(2z)^2 = 3z^2 \quad \left(0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right).$$

立体 K は C を x 軸のまわりに回転したときの通過範囲である.

C を平面 $x=k$ $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で切った切り口は, 双曲線の一部
$$H : k^2+y^2 = 3z^2 \iff z = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{y^2+k^2}$$

である. $0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}$ に留意して H を図示すると, 次のようになる.



H 上の点と点 $(k,0,0)$ との距離の

最大値は $\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}-k^2\right)+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{1-k^2}$, ……①　　最小値は $\dfrac{k}{\sqrt{3}}$ ……②

である. K の平面 $x=k$ による切り口 D_k は, H を x 軸のまわりに 1 回転したときの通過範囲に等しい.

それは半径 ① と ② の同心円で囲まれた部分なので, D_k の面積 $S(k)$ は,
$$S(k) = \pi\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2 - \pi\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2 = \pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right).$$

求める体積 V は,
$$V = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} S(k)\,dk = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 6 問

(2)　(別解)

(1) から，$Q=(0,0,1)$ のときの辺 OP の通過範囲は，平面 $z=\frac{1}{2}$ 上で点 $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円を底面とし，原点 O を頂点とする円錐の側面 C となる。この C を x 軸のまわりに 1 回転したときの通過領域が K である。

まず，C の母線 OP を x 軸のまわりに回転させて，xz 平面の $z\geqq 0$ の部分に持ってきたものを OP′ とする。OP′ $=1$ であるから，(1) の結果 $30^\circ\leqq\theta\leqq 150^\circ$ と合わせると，P′ は xz 平面上の円 $x^2+z^2=1$ のうち，$z\geqq\frac{1}{2}$ の部分を動く。よって，線分 OP′ の全体は，xz 平面上の扇形

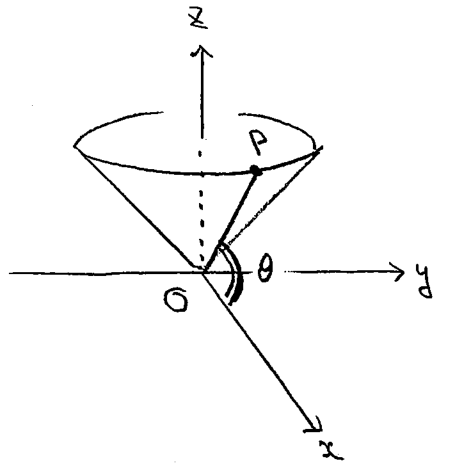
$$x^2+z^2\leqq 1,\quad z\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}x,\quad z\geqq-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

となる。この扇形を x 軸のまわりに 1 回転すれば，領域 K となる。よって，K の体積を V とすると，

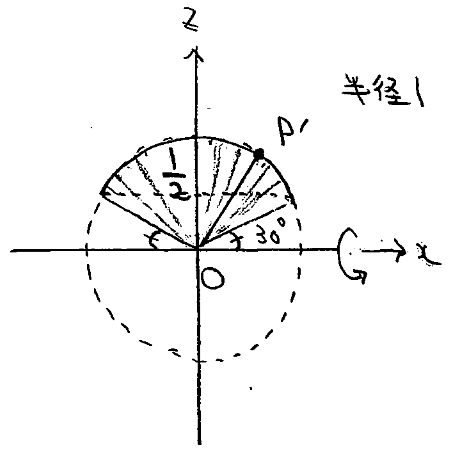
$$\frac{V}{2}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi(1-x^2)\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$V=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

である。



（この P は xz 平面上とは限らない）



（この P′ は P を xz 平面上に移してきたもの）