$\boxed{1}$

$y=x^3-4x+1$ のとき $y'=3x^2-4$ なので，

l と C の接点を $(t,\ t^3-4t+1)$ とすると

l の方程式は

$$y=(3t^2-4)(x-t)+t^3-4t+1$$

すなわち　$y=(3t^2-4)x-2t^3+1$. $\cdots$①

ここで，l の傾きは負なので

$$3t^2-4<0. \qquad \cdots ②$$

l は点 $P(3,0)$ を通るので

$$0=(3t^2-4)\cdot 3-2t^3+1$$

すなわち　$2t^3-9t^2+11=0$.

これを変形して

$$(t+1)(2t^2-11t+11)=0.$$

よって，

$$t=-1,\ \frac{11\pm\sqrt{33}}{4}.$$

ここで，$t=-1$ は② を満たし，また，

$$\frac{11+\sqrt{33}}{4}>\frac{11-\sqrt{33}}{4}>\frac{11-\sqrt{36}}{4}=\frac{5}{4}$$

であり，

$$3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2-4=\frac{11}{16}>0$$

なので，$t=\dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$ は②を満たさない．

したがって，$t=-1$ となり，これを①に

代入して l の方程式は

$$y=-x+3$$

$$f(x)=(x^3-4x+1)-(-x+3)$$

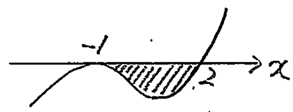
とすると，

$$f(x)=x^3-3x-2$$
$$=(x+1)^2(x-2).$$

C と l で囲まれた部分の面積 S は，

$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の

面積に等しい．



図から

$$S=-\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)^2\{(x+1)-3\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}\{(x+1)^3-3(x+1)^2\}dx$$
$$=-\left[\frac{1}{4}(x+1)^4-(x+1)^3\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{27}{4}.$$

$\boxed{2}$

(1) a を0以上の整数として，

$$1 \leqq 2^a < 10^{100} \quad \cdots ①$$

を満たす a の個数が求める個数。

$$① \Leftrightarrow 0 \leqq a\log_{10}2 < 100$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq a < \frac{100}{\log_{10}2}$$

$0.3010 < \log_{10}2 < 0.3011$ より，

$$\frac{100}{0.3011} < \frac{100}{\log_{10}2} < \frac{100}{0.3010}$$

$$\frac{100}{0.3011} = 332.1\cdots$$

$$\frac{100}{0.3010} = 332.2\cdots$$

であるから，① を満たす a の個数つまり，求める個数は，

333 個

(2) a，b を0以上の整数として，

$$A = \{(a, b) \mid 10^{99} \leqq 2^a \cdot 5^b < 10^{100},\ a \geqq b\}$$
$$B = \{(a, b) \mid 10^{99} \leqq 2^a \cdot 5^b < 10^{100},\ a \leqq b\}$$

とする。

$$10^{99} \leqq 2^a \cdot 5^b < 10^{100}$$

であるためには，

$$1 \leqq 2^a < 10^{100} \cdots ②,\quad 1 \leqq 5^b < 10^{100} \cdots ③$$

であることが必要。② を満たす a 1つに対し，

$$10^{k-1} \leqq 2^a < 10^k$$

を満たす k $(k = 1, 2, \cdots 100)$ がただ1つ存在する。これより，

$$10^{99} \leqq 2^a \cdot 10^{100-k} < 10^{100}.$$

$$10^{99} \leqq 2^{a+100-k} \cdot 5^{100-k} < 10^{100}.$$

よって，

$$(a+100-k,\ 100-k) \in A$$

さらに，$(a', b') \in A$ に対して，

$$10^{99} \leqq 2^{a'-b'} \cdot 10^{b'} < 10^{100}$$
$$10^{99-b'} \leqq 2^{a'-b'} < 10^{100-b'}$$

である。よって，(1) より，

$$n(A) = 333.$$

③ について，

$$③ \Leftrightarrow 0 \leqq b < \frac{100}{1-\log_{10}2}.$$

(1) と同様に考えると，

$$\underset{(=143.06\cdots)}{\frac{100}{0.699}} < \frac{100}{1-\log_{10}2} < \underset{(=143.08\cdots)}{\frac{100}{0.6989}}$$

であるから，③ を満たす b は，

144 個．

② のときと同様に考えれば，

$$n(B) = 144$$

また，

$$A \cap B = \{(99, 99)\}$$

以上から求める個数は，

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 333 + 144 - 1$$
$$= 476$$

つまり，

476 個

3　辺PQの中点をMとすると

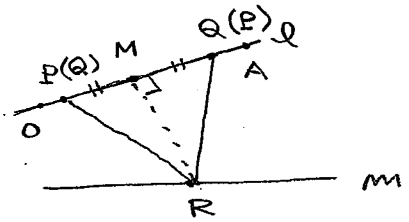
$\overrightarrow{OM} = s\overrightarrow{OA} = (0, -s, s)$（sは実数）

Rは直線m上の点より

$\overrightarrow{BR} = t\overrightarrow{BC}$（tは実数）とおける．

すなわち

$\overrightarrow{OR} = (-2t, 2, 1-4t)$



$\overrightarrow{MR} \perp \overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$\overrightarrow{MR} = (-2t, s+2, -s-4t+1)$

$\overrightarrow{OA} = (0, -1, 1)$ より

$-s-2-s-4t+1=0$

$s = -\frac{1}{2}(4t+1)$ …①

ゆえに，

$\overrightarrow{MR} = (-2t, -2t+\frac{3}{2}, -2t+\frac{3}{2})$

$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}|MR|^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{MR}|^2$

$\triangle PQR$の面積が最小

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MR}|^2$が最小．

$|\overrightarrow{MR}|^2 = (2t)^2 + 2(2t-\frac{3}{2})^2$

$= 12(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$ …②

ゆえに $t=\frac{1}{2}$, $s=-\frac{3}{2}$（①より）

のとき $\triangle PQR$は最小となる．

このとき，$R(-1, 2, -1)$

$\overrightarrow{OM} = (0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

このときのMRの値は ②より

$MR = \sqrt{\frac{3}{2}}$．

ゆえに $PQ = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot MR = \sqrt{2}$．

よって

$\overrightarrow{MP}$と$\overrightarrow{MQ}$は

一方が $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{1}{2}(0, -1, 1)$

もう一方が，$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = -\frac{1}{2}(0, -1, 1)$

よって，$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{OQ}$は

一方が，$\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}(0, -1, 1)$

$= (0, 1, -1)$

もう一方が，$\overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}(0, -1, 1)$

$= (0, 2, -2)$

以上から，

$\begin{cases} P(0, 1, -1) \\ Q(0, 2, -2) \\ R(-1, 2, -1) \end{cases}$ または $\begin{cases} P(0, 2, -2) \\ Q(0, 1, -1) \\ R(-1, 2, -1) \end{cases}$

$\boxed{4}$

$\tan\alpha=\frac{1}{p}$, $\tan\beta=\frac{1}{q}$ (p, q 自然数)

(A) $\tan(\alpha+2\beta)=2$

(1)(i) $q=1$ のとき。

$\tan\beta=1$ であるから、

$\beta=\frac{\pi}{4}+n\pi$ (n は整数)

このとき、(A)から、

$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=2$

$-\frac{1}{\tan\alpha}=2$

$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$

これは、$\tan\alpha=\frac{1}{p}>0$ に反する。

(ii) $q\geqq 2$ のとき。

$0<\tan\beta<1$ より

$$\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{\frac{2}{q}}{1-\frac{1}{q^2}}=\frac{2q}{q^2-1}.$$

また、

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}$$

であるから、(A)は、

$\tan\alpha+\tan 2\beta=2(1-\tan\alpha\tan 2\beta)$

$$\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}\right)$$

p について整理すると、

$2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$

$q\geqq 2$ より、

$q^2-q-1=q(q-1)-1\geqq 2\cdot 1-1>0$

であるから、

$$p=\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\quad\cdots①$$

①より、$q=2$ のとき、$p=\frac{11}{2}$ となり不適。

$q=3$ のとき、$p=2$。

以上(i)(ii)より、$(p, q)=(2, 3)$。

(2) p は自然数だから、①より、

$$\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq 1$$

が必要である。

$q>3$ のとき、$q^2-q-1>0$ に注意して、

$q^2+4q-1\geqq 2(q^2-q-1)$

$q^2-6q-1\leqq 0$

$(q-3)^2\leqq 10$

これを満たす自然数 $q (>3)$ は、

$q=4, 5, 6$。

①より、$q=4$ のとき、$p=\frac{31}{22}$

$q=5$ のとき、$p=\frac{22}{19}$

$q=6$ のとき、$p=\frac{59}{58}$

であり、いずれの場合も p が自然数であることに反する。

したがって、(A)を満たす p, q の組 (p, q) で、$q>3$ であるものは存在しない。(証明終り)

$\boxed{5}$

(1) $X=1$ となるのは

$(L, M)=(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$

の5つのいずれかの場合である.

$(L, M)=(1, 2)$ となるのは

n回の目がすべて「1または2」

（ただし, すべて1, すべて2は除く）

のときである.

よって, $(L, M)=(1, 2)$ となる確率は

$$\frac{2^n-2}{6^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

他の場合も同様なので, 求める確率は

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}.$$

(2) $X=5$ となるのは, $(L, M)=(1, 6)$ のときのみである.

事象E, Fを

E:「n回の目がすべて2以上である」,

F:「n回の目がすべて5以下である」

とすると, 求める確率は

$$1-P(E\cup F)$$

ここで

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n$$
$$=2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

よって, 求める確率は

$$1-2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$