第 1 問

$\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(-x,\ -y)$, $\mathrm{R}(1,\ 0)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-2x,\ -2y),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-x,\ -y),\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}}=(1+x,\ y).$$

$$\angle\mathrm{RPQ}\text{ が鋭角}\iff \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0\iff x(x-1)+y^2>0,$$

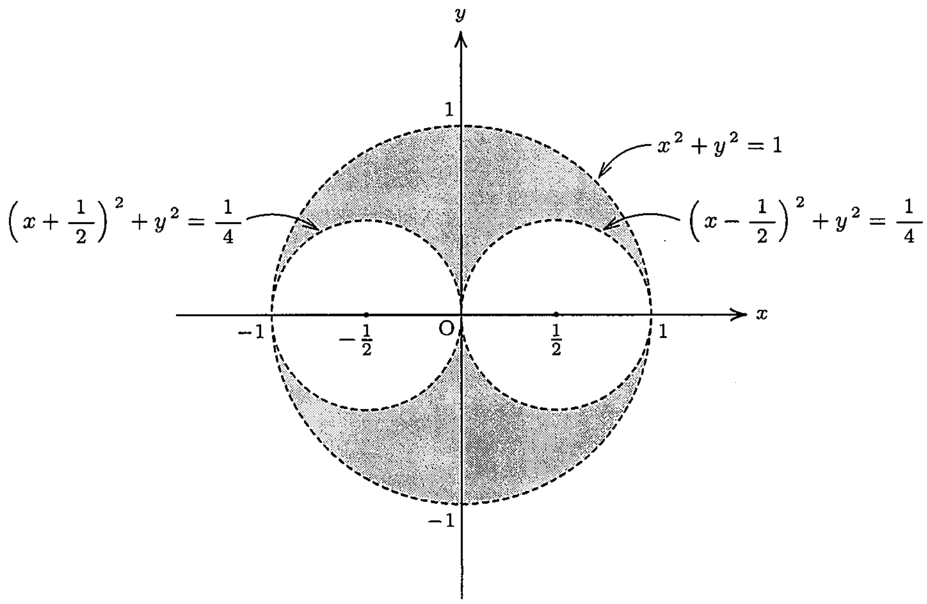
$$\angle\mathrm{PQR}\text{ が鋭角}\iff \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}<0\iff x(x+1)+y^2>0,$$

$$\angle\mathrm{QRP}\text{ が鋭角}\iff \overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0\iff 1-x^2-y^2>0,$$

よって，三角形 PQR が鋭角三角形となる $(x,\ y)$ の条件は，

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4},\\[2mm] \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4},\\[2mm] x^2+y^2<1.\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

また，これを満たす $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在範囲は，次の図の灰色部分．ただし，境界を除く．



第 2 問

一般に X が Y に勝つことを $\begin{bmatrix} \text{X} \\ \text{Y} \end{bmatrix}$ と表す．事象

$$\begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \text{B} \\ \text{A} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \text{B} \\ \text{C} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \text{C} \\ \text{B} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \text{C} \\ \text{A} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{C} \end{bmatrix}$$

の確率は全て $\frac{1}{2}$ である．

(1)　A が 5 試合目に優勝する事象は次のときに限る．

$$\begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{C} \\ \text{A} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{B} \\ \text{C} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{C} \end{bmatrix}$$

よって求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}. \quad \cdots (答)$$

(2)　A が優勝する事象は，第 1 試合に注目して，$\left\{ \begin{array}{l} \text{i)：第 1 試合が} \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix} \\ \text{ii)：第 1 試合が} \begin{bmatrix} \text{B} \\ \text{A} \end{bmatrix} \end{array} \right.$ の 2 つに分けられる．

i) の事象は

$$「\begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{C} \\ \text{A} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{B} \\ \text{C} \end{bmatrix}」\text{を } k \text{ 回反復} \to \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{C} \end{bmatrix} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

であり，試合数は $3k+2$.

ii) の事象は

$$「\begin{bmatrix} \text{B} \\ \text{A} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{C} \\ \text{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{C} \end{bmatrix}」\text{を } k \text{ 回反復} \to \begin{bmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{bmatrix} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，試合数は $3k+1$.

求める確率を p_n $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ とすると，

$n = 3k$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$p_n = 0.$$

$n = 3k+1$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$p_n = p_{3k+1} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \quad \left(k = \frac{n-1}{3}\right).$$

$n = 3k+2$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$p_n = p_{3k+2} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad \left(k = \frac{n-2}{3}\right).$$

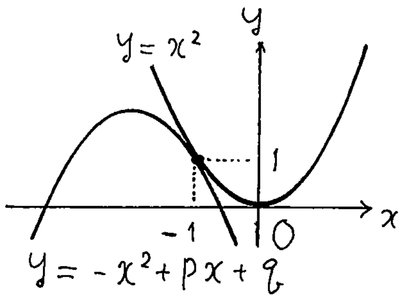
以上をまとめて，2 以上の整数 n に対して

$$p_n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (n \text{ が 3 の倍数のとき}), \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n \text{ が 3 の倍数でないとき}). \end{array} \right. \quad \cdots (答)$$

(3)　求める確率は

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{3m} p_n &= \sum_{k=1}^{m-1} p_{3k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} p_{3k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^k \\
&= \frac{1}{16}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}}{1-\frac{1}{8}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}}{1-\frac{1}{8}} \\
&= \frac{5}{14} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m. \quad \cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

第3問



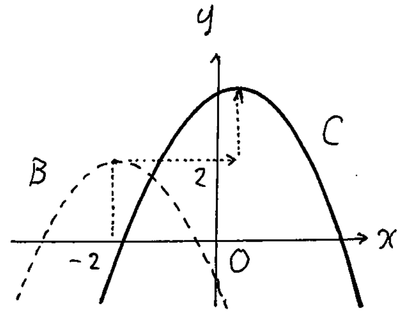
(1) A：$y=x^2$ と B：$y=-x^2+px+q$ から y を消去し

$$2x^2-px-q=0$$

この2解が $-1, -1$ であるので，解と係数の関係により

$$\begin{cases}(-1)+(-1)=\dfrac{p}{2}\\ (-1)\cdot(-1)=\dfrac{-q}{2}\end{cases}$$

よって　$p=-4$，　$q=-2$　…(答)



(2) B：$y=-x^2-4x-2$ となる．よって C の方程式は

$$y-t=-(x-2t)^2-4(x-2t)-2$$

$$\therefore\ C：y=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$$

A, C の方程式から y を消去して

$$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0 \cdots ①$$

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4(t^2-2t+1)-8t^2+18t-4$$

$$=-2t(2t-5)$$

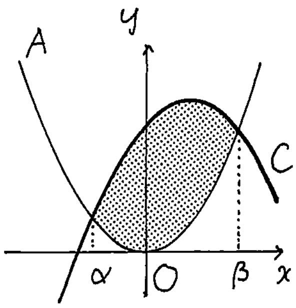
A, C が2点で交わる条件は $\dfrac{D}{4}>0$ であるから

$$0<t<\frac{5}{2}$$

このとき ① の2つの解を

$$\alpha=\frac{1}{2}\left\{2(t-1)-\sqrt{\frac{D}{4}}\right\},\ \beta=\frac{1}{2}\left\{2(t-1)+\sqrt{\frac{D}{4}}\right\}$$

とおく．A, C が囲む部分は右の網目部分となり，その面積は



第３問（つづき）

$$S(t)=\int_\alpha^\beta\{-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2-x^2\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta\{2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2\}dx$$

①の２解が α, β であるので

$$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=2(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解される．したがって

$$S(t)=-\int_\alpha^\beta 2(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{D}{4}}\right)^3=\frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}}$$

一方，$t \geqq \frac{5}{2}$ のとき　$S(t)=0$ となる．以上により

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}} & \left(0<t<\frac{5}{2}\right)\\ 0 & \left(t\geqq\frac{5}{2}\right)\end{cases}$$ …(答)

(3)　$-4t^2+10t=-4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$ であるので，$t=\frac{5}{4}$ のときこの２次関数は最大値 $\frac{25}{4}$ (>0) をとる．

(3)の結果と合わせ，$t>0$ のときの $S(t)$ の最大値は

$$S\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{24}$$ …(答)

第 4 問

(1)　3^n の 1 の位の数 (10 で割った余り) を書き出すと,

$$3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9,\ 7,\ 1,\ \cdots$$

となる. したがって,

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 1 \text{ のとき}), \\ 9 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 2 \text{ のとき}), \\ 7 & (n \text{ を } 4 \text{ で割った余りが } 3 \text{ のとき}), \\ 1 & (n \text{ が } 4 \text{ で割りきれるとき}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(注)　(1) は結論のみを求めているから, 書き出して類推すればよい.

証明するなら, $3^4 = 81$ であることを使って, 3^{4m} を 10 で割った余り (1 位の数) が 1 であることを示し, これに, 3, 9, 27 をかけることを考えればよい.

(2)　$3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 4$ だから,

$$3^{2m} \equiv 1 \pmod 4 \quad 3^{2m+1} \equiv 3 \pmod 4.$$

したがって,

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ が奇数のとき}), \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　x_n は 3^k (k は $k \geqq 0$ の整数) と表せるから奇数である.

x_n が奇数であるからすべての自然数 n について, (2) から $x_{n+1} = 3^{x_n}$ は 4 で割って 3 余り, (1) より, $x_{n+2} = 3^{x_{n+1}}$ は 10 で割って 7 余る.

したがって, 3 以上の自然数 n について x_n を 10 で割った余りは 7.

よって, x_{10} を 10 で割った余りは 7.　$\cdots$(答)

(注)　x_n を 10 で割った余りは,

$$1,\ 3,\ 7,\ 7,\ 7,\ \cdots$$