第1問

A

$$a_0 = A, \qquad a_n = a_{n-1} + ra_{n-1} - x_n. \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, N) \qquad \cdots (\sharp)$$

(A-1)　$(\sharp)$ より,

$$b_0 = A, \qquad b_n = (1+r)b_{n-1} - x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

が成り立つ．これは

$$b_n - \frac{x}{r} = (1+r)\left(b_{n-1} - \frac{x}{r}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

と変形でき，数列 $\left\{b_n - \dfrac{x}{r}\right\}$ は公比が $1+r$ の等比数列となるから,

$$b_n - \frac{x}{r} = (1+r)^n\left(b_0 - \frac{x}{r}\right). \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N)$$

$b_0 = A$ であるから,

$$b_n = \left(A - \frac{x}{r}\right)(1+r)^n + \frac{x}{r} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N) \qquad \cdots (答)$$

となる．N 年後に返済を完了するので $b_N = 0$ であるから,

$$\left(A - \frac{x}{r}\right)(1+r)^N + \frac{x}{r} = 0$$

すなわち,

$$x = \frac{r(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}A. \qquad \cdots (答)$$

また，$X = Nx$ であるから,

$$X = \frac{r(1+r)^N}{(1+r)^N - 1}NA. \qquad \cdots (答)$$

(A-2)　$(\sharp)$ より,

$$c_0 = A, \qquad c_n = (1+r)c_{n-1} - y_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, N) \qquad \cdots (*)$$

が成り立つ．

まず，N 年後に返済を完了することから，返済する元金 A の一定の割合は $\dfrac{1}{N}$ である．また，$n-1$ 年後 $(n = 1, 2, 3, \cdots, N)$ からの 1 年間で借入残高に対して発生する利子は rc_{n-1} であるから,

$$y_n = rc_{n-1} + \frac{A}{N} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, N) \qquad \cdots (**)$$

となる．$(*)$ に用いると,

$$c_n = c_{n-1} - \frac{A}{N} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

となるから，数列 $\{c_n\}$ は公差 $-\dfrac{A}{N}$ の等差数列となり,

$$c_n = c_0 - \frac{A}{N}n. \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N)$$

第 1 問 (A-2)(つづき)

$c_0 = A$ であるから，

$$c_n = \left(1 - \frac{n}{N}\right) A. \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, N) \qquad \cdots(答)$$

これを (**) に用いると，

$$y_n = -\frac{A}{N}\{rn - (Nr + r + 1)\}. \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, N) \qquad \cdots(答)$$

さらに，$Y = \sum_{n=1}^{N} y_n$ であるから，

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{Ar}{N} \cdot \frac{1}{2} N(N+1) + \frac{A}{N}(Nr + r + 1) \cdot N \\ &= \frac{(Nr + r + 2)A}{2}. \end{aligned} \qquad \cdots(答)$$

(A-3)　$y_1 = \dfrac{(1+Nr)}{N} A$ であるから，

$$\begin{aligned} x - y_1 &= \frac{r(1+r)^N}{(1+r)^N - 1} A - \frac{(1+Nr)}{N} A \\ &= \frac{r\left\{(1+r)^N - 1\right\} + r}{(1+r)^N - 1} A - \frac{(1+Nr)}{N} A \\ &= \frac{Ar}{(1+r)^N - 1} - \frac{A}{N} \\ &= -\frac{\left\{(1+r)^N - (1+Nr)\right\} A}{\left\{(1+r)^N - 1\right\} N}. \end{aligned}$$

ここで，$N \geqq 2$, $r > 0$ であるから二項定理より，

$$\begin{aligned} (1+r)^N &= 1 + {}_N\mathrm{C}_1 r + {}_N\mathrm{C}_2 r^2 + \cdots + {}_N\mathrm{C}_N r^N \\ &> 1 + Nr. \end{aligned}$$

これより，

$$-\frac{\left\{(1+r)^N - (1+Nr)\right\} A}{\left\{(1+r)^N - 1\right\} N} < 0$$

であるから $x - y_1 < 0$ となり，

y_1 の方が x より大きい．　$\cdots$(答)

第１問Ａ（つづき）

(A-4)

$$
\begin{aligned}
X-Y &= \frac{rN(1+r)^N}{(1+r)^N-1}A-\frac{Nr+r+2}{2}A \\
&= \frac{rN\left\{(1+r)^N-1\right\}+rN}{(1+r)^N-1}A-\frac{Nr+r+2}{2}A \\
&= \left\{rN+\frac{rN}{(1+r)^N-1}-\frac{Nr}{2}-\frac{r}{2}-1\right\}A \\
&= \left\{\frac{rN}{(1+r)^N-1}+\frac{Nr}{2}-\frac{r}{2}-1\right\}A \\
&= \frac{2rN+\{(N-1)r-2\}\left\{(1+r)^N-1\right\}}{2\left\{(1+r)^N-1\right\}}A.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$f(r)=2rN+\{(N-1)r-2\}\left\{(1+r)^N-1\right\} \quad (r>0)$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
f'(r) &= 2N+(N-1)\left\{(1+r)^N-1\right\}+N\{(N-1)r-2\}(1+r)^{N-1} \\
f''(r) &= N(N-1)(1+r)^{N-1}+N(N-1)(1+r)^{N-1}+N(N-1)\{(N-1)r-2\}(1+r)^{N-2} \\
&= N(N-1)(N+1)r(1+r)^{N-2}.
\end{aligned}
$$

$N \geqq 2$, $r>0$ より $f''(r)>0$ であるから $f'(r)$ は単調増加であり，

$$f'(r)>f'(0)=0.$$

これより $f(r)$ も単調増加となり，

$$f(r)>f(0)=0.$$

また，$A>0$, $r>0$ より $\dfrac{A}{2\left\{(1+r)^N-1\right\}}>0$ であるから $X-Y>0$ となる．よって，

X の方が Y より大きい．　$\cdots$(答)

第1問 (つづき)

B

(B-1)　最初にチケットは3枚あり，チケットは2枚ずつ捨てられるので偶数枚だけ残ることはない．よって，

$$P_{1,0} = P_{1,2} = 0.$$

チケットが全く捨てられないのは，全員がキープするか全員がパスする場合であるから，

$$P_{1,3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

また，$P_{1,0} + P_{1,1} + P_{1,2} + P_{1,3} = 1$ であるから，

$$P_{1,1} = 1 - (P_{1,0} + P_{1,2} + P_{1,3}) = \frac{3}{4}.$$

以上より，$N = M = 3$ のとき，

$$P_{1,1} = \frac{3}{4},\quad P_{1,2} = 0,\quad P_{1,3} = \frac{1}{4}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(B-2)　j 分後 $(1 \leqq j \leqq N-1)$ の太鼓の合図のときにチケットを持っている人数を a_j とすると $a_j \leqq M$ である．特別な状況ではチケットを持っている a_j 人について表裏の出方はそれぞれ1通りであるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{a_j} = \frac{1}{2^{a_j}}.$$

また，$M \leqq N$ より $N-1$ 分後には $M-1$ 枚のチケットはCのもとで捨てられ，Cは1枚のみ持っているので $N-1$ 分後には定常状態になっている．よって，この特別な状況下で $N-1$ 分後に定常状態となっている確率を P とすると，

$$P = \frac{1}{2^{a_1}} \cdot \frac{1}{2^{a_2}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2^{a_{N-1}}}.$$

これに $a_j \leqq M$ を用いると，

$$P \geqq \left(\frac{1}{2^M}\right)^{N-1} = \frac{1}{2^{M(N-1)}}.$$

以上と，この特別な状況は定常状態になる事象の部分事象であるから，

定常状態となる確率は $\dfrac{1}{2^{M(N-1)}}$ 以上である．

(証明終り)

第１問Ｂ (つづき)

(B-3)　開始から $i(N-1)$ 分後 $(i=1,2,3,\cdots)$ に定常状態となっている確率を $p(i)$ とする．$P_{k,1}$ は単調増加であるから $\lim_{i\to\infty} p(i)$ が収束するなら

$$\lim_{k\to\infty} P_{k,1} = \lim_{i\to\infty} p(i)$$

である．

開始から $(i+1)(N-1)$ 分後に定常状態となっているのは次の２つの場合である．

(i) $i(N-1)$ 分後に定常状態となっているとき．$(i+1)(N-1)$ 分後も定常状態となっている．

(ii) $i(N-1)$ 分後に定常状態となっていないとき．次の $N-1$ 分間で定常状態となるが，$i(N-1)$ 分後に残っているチケットの総数は M 枚以下であるから，$i(N-1)$ 分後から $(i+1)(N-1)$ 分後へ推移する確率は **(B-2)** を用いると $\dfrac{1}{2^{M(N-1)}}$ 以上である．

(i)と(ii)は排反であるから，

$$p(i+1) \geqq p(i) + \{1-p(i)\}\cdot\frac{1}{2^{M(N-1)}} \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

を満たす．これより，

$$1-p(i+1) \leqq \left(1-\frac{1}{2^{M(N-1)}}\right)\{1-p(i)\} \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

である．さらに $1-p(i)\geqq 0\ (i=1,2,3,\cdots)$ であるからこれをくり返し用いると，

$$0 \leqq 1-p(i) \leqq \left(1-\frac{1}{2^{M(N-1)}}\right)^{i-1}\{1-p(1)\}. \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

また，$0<1-\dfrac{1}{2^{M(N-1)}}<1$ より $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{M(N-1)}}\right)^{i-1}=0$ であるからハサミウチの原理より，

$$\lim_{i\to\infty}\{1-p(i)\}=0$$

すなわち，

$$\lim_{i\to\infty} p(i) = 1.$$

以上より，

$$\lim_{k\to\infty} P_{k,1} = 1. \qquad \cdots(答)$$

第１問Ｂ (つづき)

(B-4)　１分後から $\ell-1$ 分後までの $\ell-1$ 回はキープし，ℓ 分後にパスする確率が Q_ℓ であるから，

$$Q_\ell=\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell-1}\cdot\frac{1}{2}=2^{-\ell}.$$

無限級数 $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell Q_\ell$ の部分和を S_n とすると，

$$\begin{aligned}S_n&=1\cdot2^{-1}+2\cdot2^{-2}+3\cdot2^{-3}+\cdots+n\cdot2^{-n},\\ 2^{-1}S_n&=\qquad\quad 1\cdot2^{-2}+2\cdot2^{-3}+\cdots+(n-1)\cdot2^{-n}+n\cdot2^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

これら２式の辺々の差をとると，

$$\left(1-2^{-1}\right)S_n=1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3}\cdots+1\cdot2^{-n}-n\cdot2^{-(n+1)}.$$

これより，

$$\begin{aligned}S_n&=1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-(n-1)}-n\cdot2^{-n}\\ &=\frac{1-\left(2^{-1}\right)^n}{1-2^{-1}}\cdot1-n\cdot2^{-n}\\ &=2-(n+2)2^{-n}.\end{aligned}$$

ここで，$n\geqq2$ のとき二項定理を利用すると，

$$2^{-n}=\frac{1}{(1+1)^n}<\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{2}{n(n-1)}$$

より，

$$0<n\cdot2^{-n}<\frac{2}{n-1}.$$

これと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$ よりハサミウチの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot2^{-n}=0.$$

以上より，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=2$$

となるから，

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell Q_\ell=2. \qquad\cdots(\text{答})$$

第　2　問

A　【解答 1】

(A–1)　8 つの面はそれぞれ平行な対面をもつから, 1 つの面に光が当たっているとき, その対面には光が当らない. したがって, $k \leqq 4$. また, 1 つの面と隣り合った面のなす角はすべて鈍角だから, 1 つの面に光が当たっていれば隣り合う少なくとも 1 つの面に光が当たる. したがって, $k \geqq 2$.

特に 1 つの辺に平行な光線によって, その辺と隣り合う 2 面およびその対面には光が当らない. このとき $k = 2$ であり, 1 つの面に平行でどの辺にも平行でない光線によって, その面と対面には光が当らない. このとき $k = 3$ である.

以上から

$$k = 2,\ 3,\ 4. \qquad \cdots(答)$$

(A–2)　P_+ と P_-, Q_+ と Q_-, R_+ と R_- はそれぞれ原点について対称だから, 正 8 面体の影は原点の影 (原点を通り光線に平行な直線とスクリーンの交点) について点対称である.

正 8 面体の頂点は 6 個あり対称性があるから影は 6 角形以下で, 偶数角形である. したがって, 6 角形または 4 角形である.

よって,

$$n = 4,\ 6. \qquad \cdots(答)$$

(A–3)　$(k,\ n)$ は $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$ の 4 通りが可能である.

$a \geqq b \geqq c \geqq 0$ であるから, 光線は $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ の x 軸, y 軸, z 軸の順に近い方向から照射されている.

(i)　$(k,\ n) = (2, 4)$ のとき, 光が当たっている面は

$$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+,\quad \triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_-. \qquad \cdots(答)$$

(ii)　$(k,\ n) = (3, 4)$ のとき, 光が当たっている面は

$$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+,\quad \triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_-,\quad \triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_+. \qquad \cdots(答)$$

(iii)　$(k,\ n) = (4, 4)$ のとき, 光が当たっている面は

$$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+,\quad \triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_-,\quad \triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_+,\quad \triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_-. \qquad \cdots(答)$$

第 2 問 A (A–3) (つづき)

(iv)　$(k,\ n)=(4,\ 6)$ のとき, 光が当たっている面は

$$\triangle \mathrm{P_+Q_+R_+},\quad \triangle \mathrm{P_+Q_+R_-},\quad \triangle \mathrm{P_+Q_-R_+},\quad \triangle \mathrm{P_-Q_+R_+}. \qquad \cdots(答)$$

(A–4)

(i)　$(k,\ n)=(2,\ 4)$ のとき, 光線は辺 $\mathrm{P_+Q_-}$ に平行. $\overrightarrow{\mathrm{P_+Q_-}}=-(1,\ 1,\ 0)$ だから, $\overrightarrow{\ell}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0)$.

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad b=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad c=0. \qquad \cdots(答)$$

(ii)　$(k,\ n)=(3,\ 4)$ のとき, 光線は面 $\mathrm{P_+Q_-R_-}$ に垂直. $\triangle \mathrm{P_+Q_-R_-}$ の重心 G は $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$ だから $\overrightarrow{\ell}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ に垂直な条件は $a=b+c$.

$$a^2+b^2+c^2=1.\quad bc=\frac{a^2-(1-a^2)}{2}=a^2-\frac{1}{2}.$$

$b,\ c$ は $x^2-ax+a^2-\dfrac{1}{2}=0$ の 2 解.

$$b=\frac{a+\sqrt{2-3a^2}}{2},\quad c=\frac{a-\sqrt{2-3a^2}}{2},\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}<a\leqq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right). \qquad \cdots(答)$$

(iii)　$(k,\ n)=(4,\ 4)$ のとき, (ii) より, $(1,\ 0,\ 0)$ に近い側.

$$a>b+c,\quad a^2+b^2+c^2=1,\quad b\geqq c\geqq 0. \qquad \cdots(答)$$

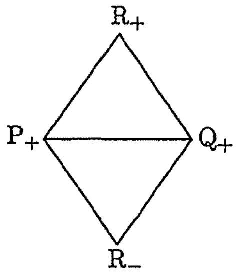
(iv)　$(k,\ n)=(4,\ 6)$ のとき, (ii) より, $(1,\ 0,\ 0)$ から遠い側.

$$a<b+c,\quad a^2+b^2+c^2=1,\quad a\geqq b\geqq c. \qquad \cdots(答)$$

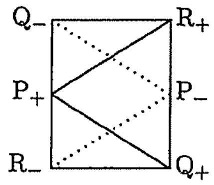
第 2 問 A (つづき)

(参考)　(i), (ii), (iii), (iv) の光線の方向から正 8 面体を眺めたときの典型的な図形を図示すると, 以下のようである.

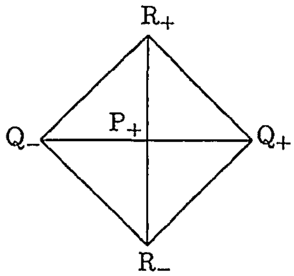
(i)　$(k, n) = (2, 4)$



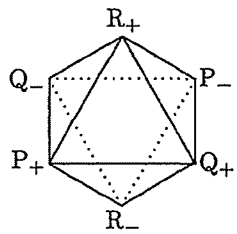
(ii)　$(k, n) = (3, 4)$



(iii)　$(k, n) = (4, 4)$



(iv)　$(k, n) = (4, 6)$



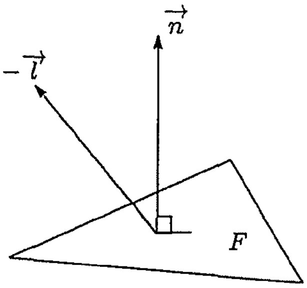
第2問

A（解答2）

正８面体が凸多面体であることより，正８面体の１つの面 F に光線 $\vec{\ell}$ があたるための条件は，F の外向き法線ベクトルを $\vec{n}$ とするとき，$\vec{n}$ と $\vec{\ell}$ のなす角が鈍角であること，すなわち $\vec{n}$ と $-\vec{\ell}$ のなす角が鋭角であることである．よって，$\vec{m}=-\vec{\ell}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\vec{m}>0 \qquad \cdots①$$

と表せる．



以下，正８面体の各面 F_j $(j=1,2,\cdots 8)$ の外向き法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_j}$ とし，各面に対して光線があたるための a,b,c の条件を考える．ただし，

$$a^2+b^2+c^2=1,\ \ a\geqq b\geqq c\geqq 0 \qquad \cdots②$$

が前提である．

(i)　$F_1=\triangle \mathrm{P_+Q_+R_+}$ について，

$$\vec{n_1}\cdot\vec{m}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a+b+c>0 \qquad (②より)$$

であるから，つねに①は成立する．

第2問A(つづき)

(ii)　$F_2=\triangle \mathrm{P_+Q_-R_+}$ について,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{m}&=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\\&=a-b+c\\&\geqq c &&(a-b\geqq 0\text{ より})\\&\geqq 0 &&(c\geqq 0\text{ より})\end{aligned}$$

であるから,

$$\text{②かつ } a=b \text{ かつ } c=0,\ \text{すなわち } a=b=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ かつ } c=0$$

のとき以外は①が成立する.

(iii)　$F_3=\triangle \mathrm{P_-Q_-R_+}$ について,

$$\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{m}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=-a-b+c<0 \qquad (\text{②より})$$

であるから, ①は成立しない.

(iv)　$F_4=\triangle \mathrm{P_-Q_+R_+}$ について,

$$\overrightarrow{n_4}\cdot\overrightarrow{m}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=-a+b+c$$

であるから,「$b+c>a$ かつ ②」のとき①は成立する.

(v)　$F_5=\triangle \mathrm{P_+Q_+R_-}$ について,

$$\overrightarrow{n_5}\cdot\overrightarrow{m}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a+b-c>0 \qquad (\text{②より})$$

であるから, つねに①は成立する.

(vi)　$F_6=\triangle \mathrm{P_+Q_-R_-}$ について,

$$\overrightarrow{n_6}\cdot\overrightarrow{m}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a-b-c$$

であるから,「$a>b+c$ かつ ②」のとき①は成立する.

第2問A(つづき)

(vii)　$F_7=\triangle \mathrm{P_-Q_-R_-}$ について,

$$\overrightarrow{n_7}\cdot\overrightarrow{m}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=-a-b-c<0 \qquad (②より)$$

であるから，①は成立しない.

(viii)　$F_8=\triangle \mathrm{P_-Q_+R_-}$ について,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_8}\cdot\overrightarrow{m}&=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=-a+b-c\\&\leqq -c \qquad (-a+b\leqq 0 より)\\&\leqq 0 \qquad (c\geqq 0 より)\end{aligned}$$

であるから，①は成立しない.

以上より,

・F_1 と F_5 にはつねに光があたる.

・②のもとで，$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $c=0$ のとき以外は F_2 に光があたる.

・②のもとで，$b+c>a$ のとき，F_4 に光があたる。

・②のもとで，$a>b+c$ のとき，F_6 に光があたる.

・F_3, F_7, F_8 に光があたることはない.

これより,

(ア) $a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $c=0$ のとき，光があたる面は F_1 と F_5.

(イ) ②かつ $a=b+c$ かつ $(a,b,c)\neq\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ のとき，光があたる面は F_1 と F_2 と F_5.

(ウ) ②かつ $b+c>a$ のとき，光があたる面は，F_1, F_2, F_4, F_5.

(エ) ②かつ $a>b+c$ のとき，光があたる面は，F_1, F_2, F_5, F_6.

(A-1)　上記の考察より，k のとり得る値は,

$$k=2 \text{ または } 3 \text{ または } 4. \qquad \cdots(答)$$

第 2 問 A(つづき)

(A-2) (ア) のとき，光は F_2 と F_8 に平行である．光のあたった $F_1 \cup F_5$ の境界上の 4 頂点が影の 4 頂点へうつる．

(イ) のとき，光は F_4 と F_6 に平行である．光のあたった $F_1 \cup F_2 \cup F_5$ の境界上の 5 頂点のうち，頂点 P_+ の影は，線分 $\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_-$ の影に重なる．他の 4 頂点は影の 4 頂点をなす．

(ウ) のとき，光と平行な面は存在しない．よって $F_1 \cup F_2 \cup F_4 \cup F_5$ の境界上に 6 頂点が影の 6 頂点を構成する．

(エ) のとき，光と平行な面は存在しない．よって，$F_1 \cup F_2 \cup F_5 \cup F_6$ の境界上の 4 頂点が影の 4 頂点を構成する．

以上より，n のとり得る値は，

$$n = 4 \text{ または } 6 \qquad \cdots(\text{答})$$

であり，可能な k, n の組は，

$$(k, n) = (2, 4),\ \ (3, 4),\ \ (4, 6),\ \ (4, 4). \qquad \cdots(\text{答})$$

(A-3) 上述より，光のあたっている面は，

$(k, n) = (2, 4)$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_-$，
$(k, n) = (3, 4)$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_-$，
$(k, n) = (4, 6)$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_-\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_-$，
$(k, n) = (4, 4)$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_+$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_+\mathrm{R}_-$，$\triangle \mathrm{P}_+\mathrm{Q}_-\mathrm{R}_-$．　$\cdots$(答)

(A-4) $(k, n) = (2, 4)$ となるのは，(ア) より，

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ c = 0 \text{ のとき．} \qquad \cdots(\text{答})$$

$(k, n) = (3, 4)$ となるのは，(イ) より，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < a \leqq \sqrt{\frac{2}{3}},\ \ b = \frac{1}{2}(a + \sqrt{2 - 3a^2}),\ \ c = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2 - 3a^2}) \text{ のとき．} \qquad \cdots(\text{答})$$

$(k, n) = (4, 6)$ となるのは，(ウ) より，

$$b + c > a,\ \ a^2 + b^2 + c^2 = 1,\ \ a \geqq b \geqq c \geqq 0 \text{ のとき．} \qquad \cdots(\text{答})$$

$(k, n) = (4, 4)$ となるのは，(エ) より，

$$a > b + c,\ \ a^2 + b^2 + c^2 = 1,\ \ a \geqq b \geqq c \geqq 0 \text{ のとき．} \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問 (つづき)

B

(B–1)　$a=(n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 2,\ 1)$ の場合, 任意の $1 \leqq j < k \leqq n$ に対して, $a_j > a_k$ となるが, $a \neq b$ だと, $1 \leqq j < k \leqq n$ で, $b_j < b_k$ となるものが存在し (*) をみたさない.

よって, $a \lhd b$ をみたす b が存在しないような a の 1 つは $a=(n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 2,\ 1)$ である.

また, $a \neq (n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 2,\ 1)$ のとき, $b=(n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 2,\ 1)$ とすれば, (*) をみたす.

よって,

$$a=(n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 2,\ 1). \qquad \cdots(答)$$

また, $b=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n)$ とすると, $a \neq b$ のとき, $1 \leqq j < k \leqq n$ に対して, $a_j > a_k$ となる j, k が存在するが, このとき, $b_j < b_k$ であり (*) をみたさない.

また, $b \neq (1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n)$ のとき, $a=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n)$ とすると, 任意の $1 \leqq j < k \leqq n$ に対し $a_j > a_k$ は成り立たないから, 「$a_j > a_k$ をみたす任意の j と k に対して $b_j > b_k$ が成り立つ」と言える.

よって,

$$b=(1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n). \qquad \cdots(答)$$

(B–2)

(ア)　$a \trianglelefteq b$ なら $1 \leqq j < k \leqq n$, $a_j > a_k$ のとき $b_j > b_k$ が成り立つ.

このとき $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ を小さい順に並べた n 次列 $\langle a \rangle$ を $(a'_1,\ a'_2,\ a'_3,\ \cdots,\ a'_n)$ とし, $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n$ を小さい順に並べた n 次列 $\langle b \rangle$ を $(b'_1,\ b'_2,\ b'_3,\ \cdots,\ b'_n)$ とする.

$a_n = a'_m$ とすると, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n-1}$ のうち $n-m$ 個は a_n より大きく, 他は a_n より小さい.

$a \trianglelefteq b$ より, $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{n-1}$ のうち $n-m$ 個は b_n より大きい. 他については b_n より大きいかどうかは (*) から判断できないから, b_n より大きいものは, $n-m$ 個以上ある.

したがって, $b_n = b'_l$ とすると, $n-l \geqq n-m$ つまり, $l \leqq m$ となる.

ここで, $\langle a^{[1]} \rangle = ({a^{[1]}}'_1,\ {a^{[1]}}'_2, {a^{[1]}}'_3, \cdots,\ {a^{[1]}}'_{n-1})$, $\langle b^{[1]} \rangle = ({b^{[1]}}'_1,\ {b^{[1]}}'_2,\ {b^{[1]}}'_3,\ \cdots,\ {b^{[1]}}'_{n-1})$ とおくと,

$$\begin{cases} a'_i = {a^{[1]}}'_i & (1 \leqq i \leqq m-1) \\ a'_{i+1} = {a^{[1]}}'_i & (m \leqq i \leqq n-1), \end{cases} \qquad \begin{cases} b'_i = {b^{[1]}}'_i & (1 \leqq i \leqq l-1) \\ b'_{i+1} = {b^{[1]}}'_i & (l \leqq i \leqq n-1) \end{cases}$$

第 2 問 B (B–2) (つづき)

である.

$\langle a\rangle \ll \langle b\rangle$ のとき,

$$a'_1 \leqq b'_1,\ a'_2 \leqq b'_2,\ \cdots,\ a'_n \leqq b'_n$$

であるから,

$$\begin{cases} {a^{[1]}}'_i = a'_i \leqq b'_i = {b^{[1]}}'_i & (1 \leqq i \leqq l-1) \\ {a^{[1]}}'_i = a'_i \leqq b'_i < b'_{i+1} = {b^{[1]}}'_i & (l \leqq i \leqq m-1) \\ {a^{[1]}}'_i = a'_{i+1} \leqq b'_{i+1} = {b^{[1]}}'_i & (m \leqq i \leqq n-1). \end{cases}$$

よって $\langle a^{[1]}\rangle \ll \langle b^{[1]}\rangle$ は成り立つ.　(証明終り)

(イ)　$a \trianglelefteq b$ のとき a, b から同じ番号の数 a_i, b_i を除いても $\trianglelefteq$ の関係は維持されるから, $a \trianglelefteq b$ なら $a^{[1]} \trianglelefteq b^{[1]}$.

(Ⅰ)　$k=0$ のとき, $a^{[0]}=a$, $b^{[0]}=b$ で, a, b は標準 n 次列だから, $a \ll b$ は成り立ち, また問題の仮定から $a \trianglelefteq b$ である.

(Ⅱ)　$k=l$ のとき, $a^{[l]} \trianglelefteq b^{[l]}$ かつ $\langle a^{[l]}\rangle \ll \langle b^{[l]}\rangle$ ならば,

(ア) より $\langle a^{[l+1]}\rangle \ll \langle b^{[l+1]}\rangle$ が成り立ち, また, $a^{[l+1]} \trianglelefteq b^{[l+1]}$ も成り立つ.

数学的帰納法により,

$$a^{[k]} \trianglelefteq b^{[k]} \text{ かつ } \langle a^{[k]}\rangle \ll \langle b^{[k]}\rangle \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n).$$

(証明終り)

(B–3)　$p(a_j)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ を小さい順に並べたものを $\langle p(a)^{[n-m]}\rangle$ とし,
$p(b_j)$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ を小さい順に並べたものを $\langle p(b)^{[n-m]}\rangle$ とする.

ただし, $\langle p(a)^{[0]}\rangle = \langle p(a)\rangle$, $\langle p(b)^{[0]}\rangle = \langle p(b)\rangle$.

$a \trianglelefteq b$ だから $p(a) \trianglelefteq p(b)$. また $\langle p(a)\rangle \ll \langle p(b)\rangle$ も成り立つ.

よって, (B–2) と同様にして, $\langle p(a)^{[n-m]}\rangle \ll \langle p(b)^{[n-m]}\rangle$ が $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ で成り立つ.

つまり, $p(a_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ を小さい順に並べたとき, i 番目のものを, $p(a'_i)^{[n-m]}$,

$p(b_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ を小さい順に並べたとき, i 番目のものを, $p(b'_i)^{[n-m]}$ とすると, 常に $p(a'_i)^{[n-m]} \leqq p(b'_i)^{[n-m]}$ となる.

したがって, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p(a_j) = \sum_{j=1}^{m} p(a'_j)^{[n-m]} \leqq \sum_{j=1}^{m} p(b'_j)^{[n-m]} = \sum_{j=1}^{m} p(b_j)$. つまり

$$\sum_{j=1}^{m} p(a_j) \leqq \sum_{j=1}^{m} p(b_j).$$

(証明終り)