第 1 問

P, Q の定め方より,

$$P=\int_0^1 s(x-1)^2dx = s\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{s}{3},$$
$$Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^t=\frac{2t^3}{3}.$$

2 つの放物線 A, B がただ 1 点を共有するための条件は，2 つの放物線の方程式を連立して y を消去した x の方程式,

$$s(x-1)^2=-x^2+t^2,$$

すなわち

$$(s+1)x^2-2sx+s-t^2=0 \qquad \cdots ①$$

が，ただ 1 つの実数解をもつことと同値である．$s+1\neq 0$ より，①は 2 次方程式であるから,

$$\frac{1}{4}(\text{①の判別式})=s^2-(s+1)(s-t^2)=0.$$

よって,

$$s(1-t^2)=t^2.$$

$0<t<1$ より，$1-t^2>0$ に注意すると,

$$s=\frac{t^2}{1-t^2}\ (>0).$$

これを用いると,

$$\frac{Q}{P}=\frac{\frac{2t^3}{3}}{\frac{s}{3}}=\frac{2t^3}{\frac{t^2}{1-t^2}}=2t-2t^3.$$

これを $f(t)$ とおくと,

$$f'(t)=2-6t^2=-6\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

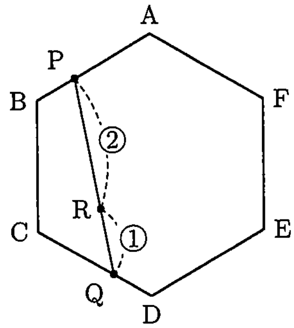
より，$0<t<1$ における $f(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(0)	↗		↘	(0)

よって，求める $\dfrac{Q}{P}$ の最大値は,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{9}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問



$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ} = t\overrightarrow{CD}$ $(0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \frac{1\cdot\overrightarrow{AP} + 2\cdot\overrightarrow{AQ}}{2+1} \\ &= \frac{1}{3}s\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{CD}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\right).\end{aligned}$$

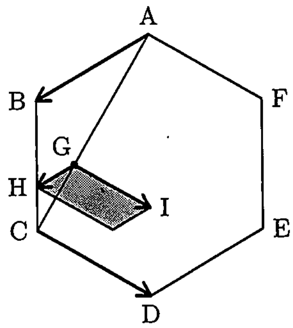
よって，線分 AC を $2:1$ に内分する点を G, $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ を満たす H, I をとると,

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AG} + s\overrightarrow{GH} + t\overrightarrow{GI}$$

であるから, $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ に対して，点 R は,

GH と GI を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周および内部

を動く.



$\left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{3}$, $\left|\overrightarrow{GI}\right| = \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\right| = \frac{2}{3}$, $\angle HGI = \angle BAF = \frac{2}{3}\pi$ であるから，求める

面積は,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{9}. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

点 P が直線 $y-x=k$ (k は整数) 上にあるとき，移動規則 (b) により，1 秒後には次のいずれかの事象が起こる.

- 確率 $\dfrac{1}{2}$ で直線 $y-x=k+1$ 上に移動する．この事象を A とする.
- 確率 $\dfrac{1}{2}$ で直線 $y-x=k-1$ 上に移動する．この事象を B とする.

(1)　規則 (a) より，最初 P は $y-x=0$ 上にあるから，1 秒後の P の座標 (s,t) が $t-s=-1$ を満たす，つまり P が直線 $y-x=-1$ 上に移るのは，事象 B が起こることを意味するから，その確率は，

$$\frac{1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　はじめ $y-x=0$ 上にあり，6 秒後に $y-x=0$ 上へ移動するのは，事象 A が 3 回，事象 B が 3 回起こるときであるから，求める確率は，

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

(1) $-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$. これを q とおく.

$$a_1=p+q=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4. \quad \cdots(\text{答})$$

$$a_2=p^2+q^2=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18. \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $pq=-1$.

$$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=(p^{n+1}+q^{n+1})+pq(p^{n-1}+q^{n-1})=a_{n+1}-a_{n-1}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) (2) より,

$$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}. \quad \cdots①$$

a_n が自然数であることを数学的帰納法で示す.

(Ⅰ) $n=1,\ 2$ のとき (1) より a_n は自然数である.

(Ⅱ) $n=k,\ k-1\ (k\geqq 2)$ のとき, a_n が自然数であるとすると, ① より a_{k+1} も自然数である.

(Ⅰ), (Ⅱ) より, すべての自然数 n に対し a_n は自然数である, (証明終り)

(4) (1) より $a_1,\ a_2$ の最大公約数は 2 であり, (3) と同様に数学的帰納法により, a_n はすべて偶数である.

$a_n=2b_n$ とおくと, すべての自然数について, b_n は自然数である.

① より,

$$b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}. \quad \cdots②$$

ある自然数 n について, $b_{n+1},\ b_n$ が 1 より大きい公約数 p をもつとすると, $b_{n+1}=pc_{n+1},\ b_n=pc_n$ となる自然数 $c_{n+1},\ c_n$ が存在し, ② より

$$b_{n-1}=p(c_{n+1}-4c_n)$$

となる. したがって, p は $b_n,\ b_{n-1}$ の公約数である.

上記の議論を続けると, $b_1,\ b_2$ は $p(>1)$ を公約数としてもつことになる.

一方, $b_1=2,\ b_2=9$ の最大公約数は 1 である. これは矛盾である.

したがって, 任意の自然数 n に対して, $b_{n+1},\ b_n$ は互いに素でなければならない.

以上から, $a_{n+1},\ a_n$ の最大公約数は 2. $\cdots$(答)