1

(1) 条件より，

$$w = R(\cos\theta + i\sin\theta)\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

と表せる．このとき，

$$w + \frac{1}{w} = R(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{R}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\theta + i\left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta.$$

したがって，

$$\begin{cases} x = \left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\theta, \\ y = \left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\theta. \end{cases}$$

$R > 1$ より $R + \frac{1}{R} \neq 0,\ R - \frac{1}{R} \neq 0$ であるから，

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{R + \frac{1}{R}}, \\ \sin\theta = \dfrac{y}{R - \frac{1}{R}}. \end{cases}$$

これを満たす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在する条件より，求める軌跡は

楕円 $\left(\dfrac{x}{R + \frac{1}{R}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{R - \frac{1}{R}}\right)^2 = 1.$

(2) 条件より，

$$w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\quad (r > 0)$$

と表せる．このとき，

$$w + \frac{1}{w} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$
$$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha.$$

したがって，

$$\begin{cases} x = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \\ y = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha. \end{cases}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha \neq 0$，$\sin\alpha \neq 0$ であるから，

$$\begin{cases} r + \frac{1}{r} = \dfrac{x}{\cos\alpha}, \\ r - \frac{1}{r} = \dfrac{y}{\sin\alpha}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha} + \dfrac{y}{\sin\alpha}\right), \\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha} - \dfrac{y}{\sin\alpha}\right). \end{cases}$$

これを満たす r $(r > 0)$ が存在する条件を求めて，

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha} + \dfrac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\dfrac{x}{\cos\alpha} - \dfrac{y}{\sin\alpha}\right), \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\cos\alpha} + \dfrac{y}{\sin\alpha}\right) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{2\cos\alpha}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{2\sin\alpha}\right)^2 = 1, \\ \dfrac{x}{\cos\alpha} + \dfrac{y}{\sin\alpha} > 0. \end{cases}$$

よって，求める軌跡は

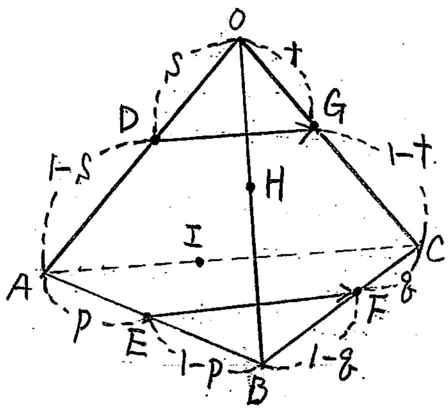
双曲線 $\left(\dfrac{x}{2\cos\alpha}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{2\sin\alpha}\right)^2 = 1$

の $\dfrac{x}{\cos\alpha} + \dfrac{y}{\sin\alpha} > 0$ を満たす部分

$(x \geqq 2\cos\alpha$ の部分$)$．

2

(1) $AE:EB=p:1-p$
$CF:FB=q:1-q$
$OD:DA=s:1-s$
$OG:GC=t:1-t$ とおく.
$\left(\begin{array}{ll} 0<p<1, & 0<q<1 \\ 0<s<1, & 0<t<1 \end{array}\right)$



$$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD}$$
$$=-s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$$
$$=-(1-p)\overrightarrow{OA}+(q-p)\overrightarrow{OB}+(1-q)\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{DG}\parallel\overrightarrow{EF}$ ならば
$\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{DG}$ （k は実数）
と表せ, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は1次独立だから,
$$q-p=0.$$
$$p=q.$$

よって, $AE:EB=CF:FB$
（証明終り）

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点であるとき, 四角形 DEFG は平行四辺形（正方形）であるから,
$$DG\parallel EF,\ DE\parallel GF.$$

(1)の結果より,
$$CF:FB=AE:EB=DA:OD \quad \cdots ①$$

同様に, 四角形 DHFI も平行四辺形（正方形）であるから,
$$CF:FB=OH:HB=OD:DA \quad \cdots ②$$

①, ②より,
$$DA:OD=OD:DA.$$
すなわち,
$$OD:DA=1:1$$
となり, D は辺 OA の中点である.

同様にして, E, F, G, H, I は辺 AB, BC, CO, OB, AC の中点である.
中点連結定理より,
$$AB=2DH,\ OA=2HE,\ OB=2DE$$
であり, 三角形 DEH は正八面体の1つの面なので,
$$DH=HE=DE.$$
よって
$$AB=OA=OB$$
となり, 三角形 OAB は正三角形である.
同様にして, 三角形 OBC, OCA, ABC は正三角形なので, 四面体 OABC は正四面体である.
（証明終り）

3

$\tan\alpha = \frac{1}{p}$, $\tan\beta = \frac{1}{q}$

(p, q は自然数).

(i) $q = 1$ のとき

$\tan\beta = 1$ より $\beta = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (nは整数)

$$\tan(\alpha + 2\beta)$$
$$= \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$
$$= -\frac{1}{\tan\alpha}$$
$$= -p \quad (<0)$$

であり, $\tan(\alpha+2\beta) = 2$ に

反する.

(ii) $q \geqq 2$ のとき

$0 < \tan\beta < 1$ より

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$
$$= \frac{\frac{2}{q}}{1-\frac{1}{q^2}}$$
$$= \frac{2q}{q^2-1}.$$

$\tan(\alpha+2\beta) = 2$ より

$$\tan\alpha + \tan 2\beta$$
$$= 2(1 - \tan\alpha\tan 2\beta).$$

$$\frac{1}{p} + \frac{2q}{q^2-1} = 2\left(1 - \frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}\right).$$

$$2p(q^2-q-1) = q^2+4q-1.$$

ここで,

$$q^2-q-1 = q(q-1)-1$$
$$\geqq 2\cdot 1 - 1 > 0$$

であるから,

$$p = \frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)} \quad \cdots ①$$

pは自然数 だから ①より

$$\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)} \geqq 1.$$

$$q^2+4q-1 \geqq 2(q^2-q-1).$$

$$(q-3)^2 \leqq 10.$$

$$q = 2, 3, 4, 5, 6$$

$\boxed{3}$

①より

$q=2$ のとき $p=\frac{11}{2}$，

$q=3$ のとき $p=2$，

$q=4$ のとき $p=\frac{31}{22}$，

$q=5$ のとき $p=\frac{22}{19}$，

$q=6$ のとき $p=\frac{59}{58}$．

(i)，(ii) より求める p，q の組は

$$(p, q)=(2, 3).$$

3

（別解）

$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$
（p，qは自然数）。

$q=1$のとき，
$\beta=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$　（nは整数）
と表せるから，このとき，

$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p\ (<0).$$

となり，これは$\tan(\alpha+2\beta)=2$に反する。

以下，$q\geqq 2$として考える。

このとき，

$$\tan 2\beta=\frac{2\times\left(\frac{1}{q}\right)}{1-\left(\frac{1}{q}\right)^2}=\frac{2q}{q^2-1},$$

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}}{1-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}}=\frac{q^2-1+2pq}{p(q^2-1)-2q}.$$

これが2と等しいとき，

$$2\{p(q^2-1)-2q\}=q^2-1+2pq\ \cdots(*)$$

$q=2$のとき，$(*)$は
$$6p-8=4p+3.$$
これをみたす自然数pは存在しない。

$q=3$のとき，$(*)$は
$$16p-12=6p+8.$$
$$p=2.$$

$p=1$のとき，$(*)$は
$$2(q^2-1-2q)=q^2-1+2q$$
$$q=3\pm\sqrt{10}$$
となり，qが自然数に反する。

以下，$p\geqq 2$かつ$q\geqq 4$で$\tan(\alpha+2\beta)=2$となるような(p,q)が存在しないことを示す。

$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$　$(p\geqq 2,\ q\geqq 4)$
であるとき，

$$\tan\alpha'=\frac{1}{p},\ \tan\beta'=\frac{1}{q}$$
$$\left(\begin{array}{l}\alpha=\alpha'+N\pi,\ \beta=\beta'+M\pi\\ (0<\alpha'<\frac{\pi}{4},\ 0<\beta'<\frac{\pi}{4}\ ;\ N,M\text{は整数})\end{array}\right)$$
となるα'，β'が存在する。

また，
$$\tan\alpha_0=\frac{1}{2},\ \tan\beta_0=\frac{1}{3}$$
$$\left(0<\alpha_0<\frac{\pi}{4},\ 0<\beta_0<\frac{\pi}{4}\right)$$
をみたすα_0，β_0に対して
$p\geqq 2$かつ$q\geqq 4$より

$$0<\tan\alpha'\leqq\tan\alpha_0,\ 0<\tan\beta'<\tan\beta_0.$$
$$0<\alpha'\leqq\alpha_0,\ 0<\beta'<\beta_0.$$
$$0<\alpha'+2\beta'<\alpha_0+2\beta_0\left(<\frac{3}{4}\pi\right)$$
となる。$\cdots(**)$

ここで
$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan(\alpha'+2\beta'+(N+2M)\pi)=\tan(\alpha'+2\beta')$$
であり，先の議論により
$$\tan(\alpha_0+2\beta_0)=2$$
であるから，$\alpha_0+2\beta_0<\dfrac{\pi}{2}$であり，
$(**)$より

3

$0 < \tan(\alpha' + 2\beta') < \tan(\alpha_0 + 2\beta_0)$.

$0 < \tan(\alpha + 2\beta) < 2$.

よって，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ とはならない。

上以上より，$p \geqq 2$ かつ $q \geqq 4$ のとき

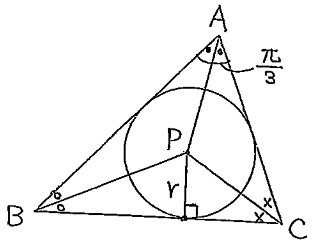
$\tan(\alpha+2\beta)=2$ となる p, q は

存在しないから，求める組は

$(p,\ q) = (2,\ 3)$.

$\boxed{4}$

(1)

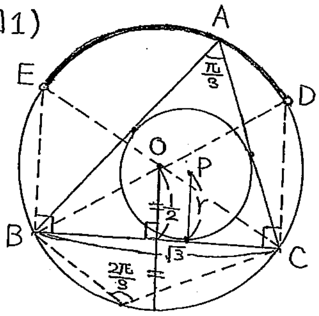


$$\angle BPC=\pi-(\angle PBC+\angle PCB)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{3}.$$

(2) 正弦定理より，$\dfrac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\cdot 1$.

ゆえに，$BC=\sqrt{3}$.

(図1)

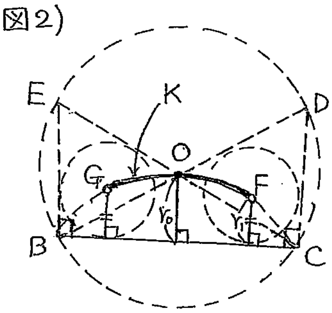


(Oは△ABCの外心.)

△ABCは鋭角三角形であるから，点Aは(図1)の劣弧DE(両端を除く)上にある.

(1)より，$\angle BPC=\frac{2\pi}{3}$であるから,点Pは劣弧BCを直線BCに関して対称移動した弧K上で，(図2)のFとGの間(両端を除く)にある.

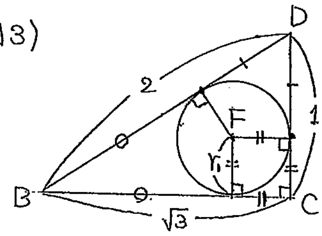
(図2)



(F, Gはそれぞれ△BCD，△BCEの内心.)

※　$\angle FBC<\angle PBC<\angle GBC$
$\left(=\frac{1}{2}\angle B\right)$
であり，点Pは弧K上でFとGの間(両端を除く)をすべて動ける.

(図3)



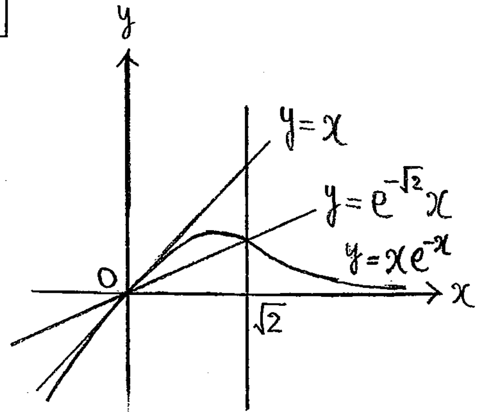
三角形BCDの内接円の半径r_1は，(図3)より

$$r_1=\frac{BC+CD-DB}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1-2}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

以上より，rのとり得る値の範囲は $r_1<r\leqq r_0$ ((図2)) であり，

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\frac{1}{2}.$$

$\boxed{5}$



$(xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}$ より，原点における $y=xe^{-x}$ の接線は $y=x$．

(ア)　$a \geqq 1$ のとき

$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において，

$$xe^{-x} - ax = x(e^{-x} - a) \leqq 0$$

より直線 $y=ax$ は曲線 $y=xe^{-x}$ の上側にあり，$S(a)$ は増加する．

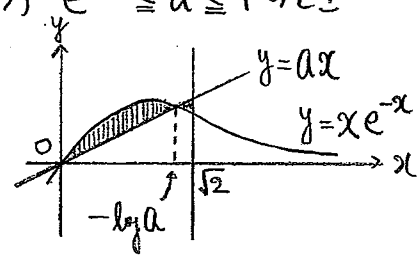
(イ)　$0 \leqq a \leqq e^{-\sqrt{2}}$ のとき

$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において，

$$xe^{-x} - ax = x(e^{-x} - a) \geqq 0$$

より直線 $y=ax$ は曲線 $y=xe^{-x}$ の下側にあり，$S(a)$ は減少する．

(ウ)　$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ のとき



$$S(a) = \int_0^{-\log a} (xe^{-x} - ax)\,dx + \int_{-\log a}^{\sqrt{2}} (ax - xe^{-x})\,dx$$

$$= \Big[-(x+1)e^{-x} - \frac{a}{2}x^2\Big]_0^{-\log a} + \Big[\frac{a}{2}x^2 + (x+1)e^{-x}\Big]_{-\log a}^{\sqrt{2}}$$

$$= 2(\log a - 1)a - (\log a)^2 a + a + 1 + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$$

$$S'(a) = 2(1 + \log a - 1) - \{(\log a)^2 + 2\log a\} + 1$$

$$= 1 - (\log a)^2.$$

a	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

$S(a)$ の増減は表のようになり，$a = e^{-1}$ で最小となる．

(ア)，(イ)，(ウ)より求める最小値は，

$$S(e^{-1}) = -4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1.$$

6

X を3で割ったとき，割り切れる確率を a_n，1余る確率を b_n，2余る確率を c_n とする．

k 番目に取り出したカードの数を X_k とする．

X を3で割ったときの余りは $X_1+X_2+\cdots+X_n$ を3で割った余りと等しい．

$X_1+X_2+\cdots+X_n+X_{n+1}$ が3で割り切れるのは，

(i) $X_1+X_2+\cdots+X_n$ が3で割り切れ，$X_{n+1}=3$．

(ii) $X_1+X_2+\cdots+X_n$ を3で割った余りが1であり，$X_{n+1}=2$，または $X_{n+1}=5$．

(iii) $X_1+X_2+\cdots+X_n$ を3で割った余りが2であり，$X_{n+1}=1$，または $X_{n+1}=4$．

のいずれかの場合である．

よって，

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{5}+b_n\cdot\frac{2}{5}+c_n\cdot\frac{2}{5}$$

である．

$a_n+b_n+c_n=1$ であるから，$b_n+c_n=1-a_n$ であり，

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{1}{5}+(1-a_n)\cdot\frac{2}{5}$$
$$=-\frac{1}{5}a_n+\frac{2}{5}.$$

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}\left(a_n-\frac{1}{3}\right).$$

よって，

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{3}\right).$$

$a_1=\frac{1}{5}$ であり，

$$a_n=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\left(-\frac{2}{15}\right)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n.$$