第１問

$x>0$ で定義された関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},$$
$$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

とおく．任意の $x>0$ に対して $f(x)>0, g(x)>0$ である．

1. $f(x)<e$ を示す．

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

の両辺の対数を取って微分すると，

$$\begin{aligned}\log f(x)&=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\\&=x\left\{\log(x+1)-\log x\right\},\\(\log f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}&=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\\&=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

ここで新たに右辺を $F(x)$ とおくと，その導関数は

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}\\&=\frac{x-(x+1)}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}\\&=\frac{-1}{x(x+1)^2}\end{aligned}$$

であり，任意の $x>0$ について $F'(x)<0$，すなわち $F(x)$ は単調減少．
また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$ である．
よって，$x>0$ で $F(x)>0$．これと，$x>0$ で $f(x)>0$ であることより，$x>0$ で $f'(x)=f(x)F(x)>0$．
したがって，$f(x)$ は単調増加であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=e$ だから，$x>0$ で $f(x)<e$ である．

第１問 (つづき)

2. $e < g(x)$ を示す．

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

の両辺の対数を取って微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{g'(x)}{g(x)} &= \log(x+1) - \log x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)\\ &= \log(x+1) - \log x - \left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x(x+1)}.\end{aligned}$$

ここで新たに右辺を $G(x)$ とおくと，その導関数は

$$\begin{aligned}G'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}\right)'\\ &= \frac{-1}{x(x+1)} - \frac{x(x+1) - \left(x+\frac{1}{2}\right)(2x+1)}{(x(x+1))^2}\\ &= \frac{-x(x+1) + x^2 + x + \frac{1}{2}}{x^2(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{2x^2(x+1)^2}\end{aligned}$$

であり，任意の $x > 0$ について $G'(x) > 0$，すなわち $G(x)$ は単調増加．

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}\right\} = 0$ である．

よって，$x > 0$ で $G(x) < 0$．これと，$x > 0$ で $g(x) > 0$ であることより，$x > 0$ で $g'(x) = g(x)G(x) < 0$．

したがって，$g(x)$ は単調減少であり，

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = e$$

だから，$x > 0$ で $e < g(x)$ である．

以上 1., 2. より，すべての正の実数 x について $f(x) < e < g(x)$，すなわち

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

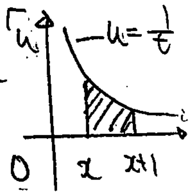
が成り立つ．　　　　(証明終り)

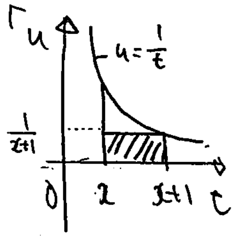
第1問（つづき）

注　$F(x)>0$，$G(x)<0$ は次のように考えることもできる.

$u=\frac{1}{t}$ $(t>0)$ のグラフが下に凸であることに注意する

$$F(x)=\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt-\frac{1}{x+1}$$

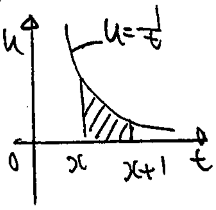
=「


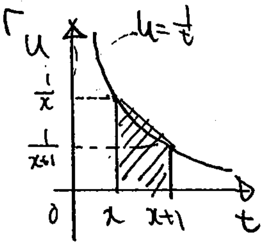
の面積」 −「


の面積」

$>0.$

$$G(x)=\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

=「


の面積」 −「


の面積」

$<0.$

第２問

(1)　1試合目にＡが勝つか，Ｂが勝つかで分けると，勝者が連続しないときは，各試合における勝者と敗者は次の表のようになる．

（i）1試合目にＡが勝つとき，

試合目	1	2	3	4	…
勝者	A	C	B	A	C
敗者	B	A	C	B	A

（ii）1試合目にＢが勝つとき，

試合目	1	2	3	4	…
勝者	B	C	A	B	C
敗者	A	B	C	A	B

これから，4回目以降はともに $\boxed{}$ の部分が繰り返すことになる．よって，Ａが２回続けて勝つのは，

（i）のときは，

試合目	1	2	3	4	5	6	7	…	$3l+1$	$3l+2$
勝者	A	C	B	A	C	B	A	…	A	A
敗者	B	A	C	B	A	C	B	…	B	C

$(l \geqq 0)$

（ii）のときは，

試合目	1	2	3	4	5	6	7	…	$3l$	$3l+1$
勝者	B	C	A	B	C	A	B	…	A	A
敗者	A	B	C	A	B	C	A	…	C	B

$(l \geqq 1)$

となる場合に限る．各回起こる確率が $\frac{1}{2}$ なので，ちょうど n 試合目でＡが優勝する確率 p_n は，

（i）のとき $n=3l+2$ として，$\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+2}$ $(l \geqq 0)$，（ii）のとき $n=3l+1$ として，$\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$ $(l \geqq 1)$．

また，$n=3l$ $(l \geqq 1)$ と $n=1$ のときは確率は0となる．よって，2以上の整数 n に対して，

$$p_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & (n\text{ が3の倍数でないとき}), \\ 0 & (n\text{ が3の倍数のとき}) \end{cases} .$$

…(答)

(2)　$3m$ 回以下でＡが優勝する事象を X，$3m$ 回以下でＡが優勝し，その最後の対戦相手がＢである事象を Y とすると，求める条件付き確率は，　$P_X(Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}$．

$m \geqq 2$ のとき，

$$P(X)=\sum_{l=0}^{m-1}p_{3l+2}+\sum_{l=1}^{m-1}p_{3l+1}=\sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+2}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{8}}+\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{1}{14}\left\{5-12\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}. \qquad \cdots(*)$$

ここで，$P(X\cap Y)$ は(1)(ii)のときの確率の和であることから，

$$P(X\cap Y)=\sum_{l=1}^{m-1}p_{3l+1}=\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}=\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{14}\left\{1-8\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}. \qquad \cdots(**)$$

また，$m=1$ のとき，　$P(X)=p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$P(X\cap Y)=0$ であるから $m=1$ のときも(*)，(**)は成立する．

第２問（つづき）

よって，求める条件付き確率は，

$$P_X(Y)=\frac{\frac{1}{14}\left\{1-8\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}}{\frac{1}{14}\left\{5-12\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}}=\frac{1-8\left(\frac{1}{8}\right)^m}{5-12\left(\frac{1}{8}\right)^m}=\frac{8^m-8}{5\cdot 8^m-12}.$$

…(答)

第3問

直線 P_1Q, P_2Q, P_3Q の方向ベクトルの1つとして，それぞれ $\overrightarrow{P_1Q}$, $\overrightarrow{P_2Q}$, $\overrightarrow{P_3Q}$ をとり，s, t, u を媒介変数として直線 P_iQ $(i=1,2,3)$ の媒介変数表示は次のように書ける．

直線 P_1Q: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ (a-1)s+a \end{pmatrix}$,

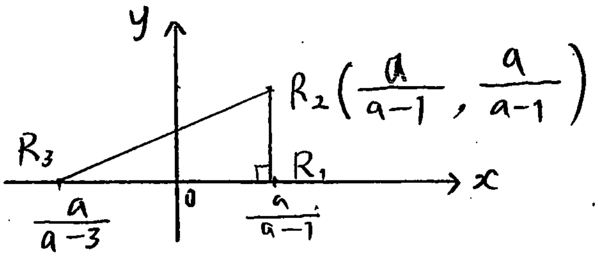
直線 P_2Q: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ (a-1)t+a \end{pmatrix}$,

直線 P_3Q: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ (a-3)u+a \end{pmatrix}$.

それぞれの式で $z=0$ とおき，

$s=t=\dfrac{-a}{a-1}$, $u=\dfrac{-a}{a-3}$ を得て，$R_1\left(\dfrac{a}{a-1}, 0, 0\right)$, $R_2\left(\dfrac{a}{a-1}, \dfrac{a}{a-1}, 0\right)$, $R_3\left(\dfrac{a}{a-3}, 0, 0\right)$ である．

$1<a<3$ に注意して $\triangle R_1R_2R_3$ を xy 平面に図示すると，



図より $\triangle R_1R_2R_3$ は直角三角形であり，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a-1}\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a-3}\right)$$
$$=-\frac{a^2}{(a-1)^2(a-3)}.$$

第3問（つづき）

$S(a)$ $(1<a<3)$ の増減を調べる.

$$S'(a) = -\frac{(a^2)'\{(a-1)^2(a-3)\}-a^2\{(a-1)^2(a-3)\}'}{\{(a-1)^2(a-3)\}^2}$$

$$= \frac{a(a-1)(a^2+a-6)}{(a-1)^4(a-3)^2}$$

$$= \frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(a-3)^2}$$

$1<a<3$ だから, $S'(a)$ の符号は $a-2$ の符号と等しく, 次の増減表を得る

a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

増減表より $S(a)$ は $a=2$ で最小値をとり, そのとき

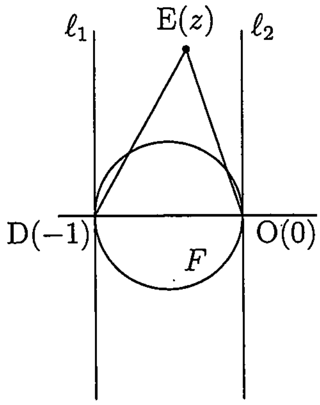
$$S(2) = -\frac{2^2}{(2-1)^2(2-3)} = 4$$ である. ---（答）

第4問

$z=1$ の場合は3点 A, B, C は一致して, 三角形を作らない.
以下 $z \neq 1$ とする.
-1 だけ平行移動すると, 3点は $0, z-1, z^2-1$ になる.
これらを $z-1$ で割ると $0, 1, z+1$ になる.
$z-1$ で割る操作は回転と拡大・縮小の合成なので, $0, 1, z+1$ を頂点に持つ三角形は, もとの三角形と相似である.
-1 だけ平行移動すると, 3点は $\mathrm{D}(-1), \mathrm{O}(0), \mathrm{E}(z)$ になる.
DOE が鋭角三角形になる条件を求めれば良い.

DOE が三角形をなす $\iff$ E は 直線 DO 上にない

である. 以下, この条件を仮定する.
DO を直径とする円周を F,
直線 DO に垂直な D を通る直線を ℓ_1,
直線 DO に垂直な O を通る直線を ℓ_2 とする.

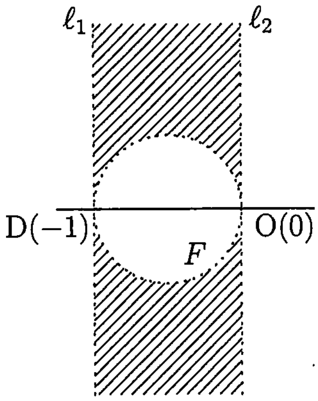


$\angle\mathrm{OED} < \dfrac{\pi}{2} \iff$ E が F の外側にある.

$\angle\mathrm{EDO} < \dfrac{\pi}{2} \iff$ E が ℓ_1 に関して O と同じ側にある.

$\angle\mathrm{DOE} < \dfrac{\pi}{2} \iff$ E が ℓ_2 に関して D と同じ側にある.

以上より, 求める z の範囲は次図の斜線部である. ただし, 境界は含まない.



……(答)

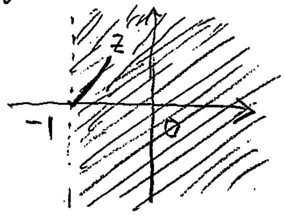
第４問(つづき)

(参考) 次のようにに考えてもよい．(以下，偏角θは$-180^\circ<\theta\leqq180^\circ$とする)

$\angle A$が鋭角 $\Leftrightarrow \left|\arg\dfrac{z^2-1}{z-1}\right|=\left|\arg(z+1)\right|<90^\circ$

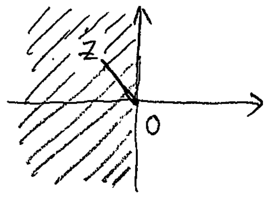
$\Leftrightarrow \left|\arg(z-(-1))\right|<90^\circ$

$\Leftrightarrow$



$\angle B$が鋭角 $\Leftrightarrow \left|\arg\dfrac{z^2-z}{1-z}\right|=\left|\arg(-z)\right|<90^\circ$

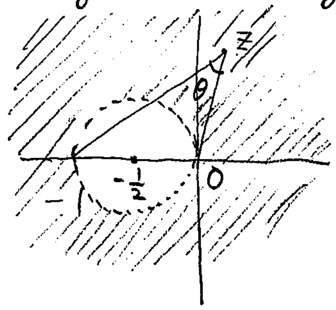
$\Leftrightarrow$



$\angle C$が鋭角 $\Leftrightarrow \left|\arg\dfrac{1-z^2}{z-z^2}\right|=\left|\arg\dfrac{1+z}{z}\right|<90^\circ$

$\Leftrightarrow \left|\arg(z-(-1))-\arg z\right|<90^\circ$

$\Leftrightarrow$



$(\theta<90^\circ)$

よって，これらの共通部分が答．

第4問　（別解）

$z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと, 点 C を表す複素数は

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

であるから, xy 平面における 3 点

$$\mathrm{A}(1, 0),\ \mathrm{B}(x, y),\ \mathrm{C}(x^2 - y^2, 2xy)$$

が鋭角三角形の頂点をなすための条件を x, y で表すことを考える.

まず A, B, C が同一直線上にないことが必要であるが,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x-1,\ y)\ , \\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x^2 - y^2 - 1,\ 2xy) \end{aligned} \quad \cdots ①$$

より, A, B, C が同一直線上にある条件は,

$$\begin{gathered} (x-1) : y = (x^2 - y^2 - 1) : 2xy\ . \\ (x-1) \cdot 2xy - y(x^2 - y^2 - 1) = 0\ . \\ y(x^2 + y^2 - 2x + 1) = 0\ . \\ y\left\{(x-1)^2 + y^2\right\} = 0\ . \end{gathered}$$

すなわち, $y = 0$ または $(x, y) = (1, 0)$ であるから, 以下ではこれが成り立たない, つまり

$$y \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (x, y) \neq (1, 0) \quad \cdots ②$$

のもとで考える.

①より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (x-1)(x^2 - y^2 - 1) + y \cdot 2xy \\ &= (x+1)y^2 + (x-1)(x^2 - 1) \qquad (y\ \text{について整理した}) \\ &= (x+1)\left\{(x-1)^2 + y^2\right\} \end{aligned}$$

であり, ②のもとでは $(x-1)^2 + y^2 > 0$ となることに注意すると, $\angle\mathrm{BAC}$ が鋭角となる, すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角が鋭角となる条件は,

$$\begin{gathered} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} > 0\ . \\ x + 1 > 0\ . \\ x > -1\ . \end{gathered} \quad \cdots ③$$

$\angle\mathrm{ABC}$ が鋭角となる条件, および $\angle\mathrm{ACB}$ が鋭角となる条件も同様に考えることができるので, ①と

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (x^2 - y^2 - x,\ 2xy - y)$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= -(x-1)(x^2 - y^2 - x) - y(2xy - y) \\ &= -xy^2 - x^3 + 2x^2 - x \qquad (y\ \text{について整理した}) \\ &= -x(y^2 + x^2 - 2x + 1) \\ &= -x\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}\ , \end{aligned}$$

第４問　（別解つづき）

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} &= (-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{BC}})\\
&= (x^2-y^2-1)(x^2-y^2-x)+2xy(2xy-y)\\
&= y^4+(2x^2-x+1)y^2+(x^2-1)(x^2-x) \qquad (y\text{ について整理した})\\
&= y^4+(2x^2-x+1)y^2+(x^2+x)(x^2-2x+1)\\
&= (y^2+x^2+x)(y^2+x^2-2x+1)\\
&= \left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}\right\}\left\{(x-1)^2+y^2\right\}
\end{aligned}
$$

となることを用いれば, 残りの条件は

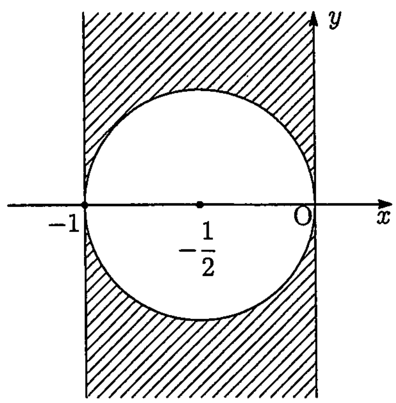
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}>0\ ,$$
$$x<0 \qquad \cdots④$$

および

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}>0\ ,$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}>0\ ,$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4} \qquad \cdots⑤$$

である.

以上②～⑤より, 複素数平面上の点 z, すなわち xy 平面上の点 (x, y) の存在範囲は次図の斜線部のようになり, 境界を除く.



…(答)

第５問

$\alpha = 0.a_1a_2\cdots a_k$ とおく.

(1) 与えられた不等式は $10^k + \alpha \leqq \sqrt{n} < 10^k + \alpha + 10^{-k}$ と変形できる. この不等式の左辺, 中辺, 右辺はすべて正なので, 各辺を 2 乗しても同値. よって $(10^k + \alpha)^2 \leqq n < (10^k + \alpha + 10^{-k})^2$ をみたす正の整数 n を求めればよい.

$$(10^k + \alpha)^2 = 10^{2k} + 2\cdot 10^k\alpha + \alpha^2,$$
$$(10^k + \alpha + 10^{-k})^2 = 10^{2k} + 2\cdot 10^k(\alpha + 10^{-k}) + (\alpha + 10^{-k})^2$$

であり,

$$10^k\alpha = 10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k,$$
$$10^k(\alpha + 10^{-k}) = 10^k\alpha + 1$$

はともに正の整数である.
また, $0 < \alpha < 1,\ 0 < \alpha + 10^{-k} \leqq 1$ より

$$0 < \alpha^2 < 1, \quad 0 < (\alpha + 10^{-k})^2 \leqq 1$$

である.
よって求める n は

$$10^{2k} + 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k) + 1,$$
$$10^{2k} + 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k) + 2 \qquad \cdots\text{(答)}$$

の 2 つである.

(2) (1) と同様にして, 与えられた不等式は $(p + \alpha)^2 \leqq m < (p + \alpha + 10^{-k})^2$ と同値.
この右辺と左辺の差は

$$\begin{aligned}(p + \alpha + 10^{-k})^2 - (p + \alpha)^2 &= 10^{-k}(2p + 2\alpha + 10^{-k})\\ &\geqq 10^{-k}\cdot 2p\\ &\geqq 10^{-k}\cdot 2\cdot 5\cdot 10^{k-1} = 1\end{aligned}$$

となるので, 不等式をみたす正の整数 m が存在する.　(証明終り)

(3) $\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = \alpha$ をみたす正の整数 s が存在したと仮定する. $[\sqrt{s}\,]$ は整数, α は有理数なので $\sqrt{s}$ は有理数. よって互いに素な正の整数 M, N を用いて $\sqrt{s} = \dfrac{N}{M}$ とかける. このとき $s = \dfrac{N^2}{M^2}$ は整数であり, M^2, N^2 は互いに素なので $M^2 = 1$ を得る. したがって $M = 1$ なので $\sqrt{s} = N$ は整数であり, $\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0$ となるので矛盾. よって条件をみたす正の整数 s は存在しない.　(証明終り)

第6問

$\mathrm{A}(X,Y,0)$, $\mathrm{B}(x,y,z)$ とすると，条件 (b) から線分 AB 上に C があるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad (k\geqq 0)$$

をみたす k がある．

$$(x,y,z-1)=k(-X,-Y,1)$$

より $k=z-1$ であり，$z\neq 1$ のとき $X=\dfrac{x}{1-z}$, $Y=\dfrac{y}{1-z}$.

$z\neq 1$ のとき，$\mathrm{AB}^2=4$ より，

$$\left(\frac{x}{1-z}-x\right)^2+\left(\frac{y}{1-z}-y\right)^2+z^2=4.$$
$$\left(\frac{xz}{1-z}\right)^2+\left(\frac{yz}{1-z}\right)^2+z^2=4.$$
$$(x^2+y^2)z^2=(4-z^2)(1-z)^2.$$

$z\neq 0$ なので，

$$x^2+y^2=\frac{(4-z^2)(1-z)^2}{z^2}. \tag{1}$$

$z=1$ のときは $\mathrm{B}=\mathrm{C}=(0,0,1)$ になるはずだが，(1) で $z=1$ とすると $x^2+y^2=0$ から $x=y=0$ となるので，(1) は $z=1$ のときも成り立つ．

また $x^2+y^2\geqq 0$ より (1) をみたす x,y が存在するのは $4-z^2\geqq 0$ のとき．したがって $z\geqq 1$ とあわせて

$$1\leqq z\leqq 2. \tag{2}$$

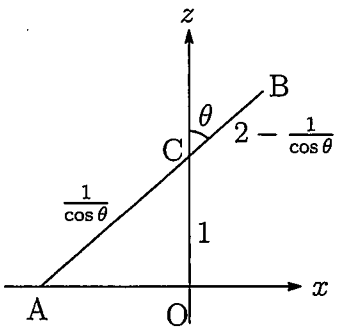
K のうち $z\geqq 1$ の部分は，点 B が動いてできる曲面で囲まれた領域になる．つまり，平面 $z=t$ での切り口は (1) から円になり，(2) より $1\leqq t\leqq 2$ である．

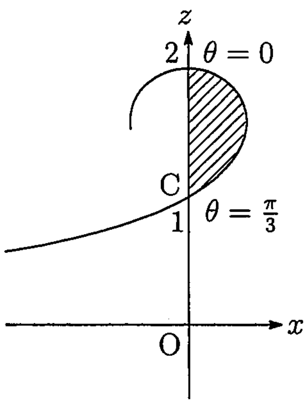
よって K の $z\geqq 1$ の部分の体積は，

$$\begin{aligned}\pi\int_1^2\frac{(4-z^2)(1-z)^2}{z^2}dz&=\pi\int_1^2\left(-z^2+2z+3-\frac{8}{z}+\frac{4}{z^2}\right)dz\\&=\pi\left[-\frac{z^3}{3}+z^2+3z-8\log z-\frac{4}{z}\right]_1^2\\&=\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)\pi.\end{aligned}$$
・・・(答)

第６問 (別解)

問題の立体 K は z 軸を軸とする回転体であるから, まず, 線分 AB が xz 平面上かつ A が $x \leqq 0$ の部分にある場合を考える.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と z 軸の正方向のなす角を θ とおくと $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ である.
$\mathrm{AC} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ であるから, $\mathrm{CB} = 2 - \dfrac{1}{\cos\theta}$ となる.
よって, xz 平面上で $\mathrm{B}\left(\left(2-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\sin\theta,\ 2\cos\theta\right)$ となる.
C を極, z 軸の $z \geqq 1$ の部分を始線とする極方程式で表わすと, B の軌跡は
$r = 2 - \dfrac{1}{\cos\theta}$ で表すことができる.





K は, 線分 CB が通過する部分を z 軸で回転して得られる立体であるから,

$$V = \int_1^2 \pi x^2\,dz = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \pi\left\{\left(2-\frac{1}{\cos\theta}\right)\sin\theta\right\}^2(-2\sin\theta)d\theta$$
$$= 2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^0\left(2-\frac{1}{\cos\theta}\right)^2(1-\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta.$$

$\cos\theta = u$ と置換すると,

$$V = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\left(2-\frac{1}{u}\right)^2(1-u^2)du = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\left(4-\frac{4}{u}+\frac{1}{u^2}\right)(1-u^2)du$$
$$= 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\left(-4u^2+4u+3-\frac{4}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du$$
$$= 2\pi\left[-\frac{4}{3}u^3+2u^2+3u-4\log u-\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$= 2\pi\left\{\left(-\frac{4}{3}+2+3-1\right)-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-4\log\frac{1}{2}-2\right)\right\}$$
$$= 2\pi\left\{\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{6}+4\log 2\right)\right\} = \left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)\pi. \qquad \cdots\cdots(答)$$