1

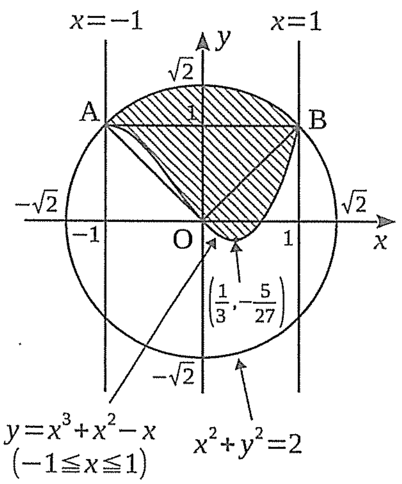
$f(x)=x^3+x^2-x$ とおく.

$$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$$

であり, $-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減は次の表のようになる.

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$	1

よって,面積を求める部分は図の斜線部となる.
ただし, $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,1)$ である.



ここで,三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$$

であり,扇形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

である.

よって,求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\{1-f(x)\}dx+\frac{\pi}{2}-1$$

$$=2\int_0^1(1-x^2)dx+\frac{\pi}{2}-1$$

$$=2\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\frac{\pi}{2}-1$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}.$$

$\boxed{2}$ 「はずれ」の確率をpとする．

ボタンを20回押したとき，

1回以上「あたり」の出る確率が

36%なので，余事象を考え

$$1-p^{20}=\frac{36}{100}$$

すなわち $p^{20}=\frac{64}{100}$．…①

ボタンをn回押して1回以上

「あたり」の出る確率が90%以上

となるとすれば，余事象を考え

$$1-p^{n}\geqq\frac{90}{100}$$

すなわち $p^{n}\leqq\frac{1}{10}$．

$n\log_{10}p\leqq-1$．（①より$p>0$）

$n\log_{10}p^{20}\leqq-20$．

$n\log_{10}\frac{64}{100}\leqq-20$（①より）

$n(6\log_{10}2-2)\leqq-20$．

$0.3010<\log_{10}2<0.3011$より

$$n\geqq\frac{10}{1-3\log_{10}2}$$ であり，

$$103<\frac{10}{1-3\log_{10}2}<104.$$

ゆえに，自然数nの最小値は

104 なので

ボタンを最低104回押せばよい．

3　$2^{12} = 1331$（n進法）の両辺を10進法で表すと，

$2^{n+2} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$2^{n+2} = (n+1)^3$．　…①

$n = 4, 5, 6$ は ① を満たさない．

$n = 7$ は ① を満たす．

「n が 8 以上の自然数のとき

$2^{n+2} > (n+1)^3$」　…(＊)

であることを数学的帰納法により証明する．

[I] $n = 8$ のとき

$2^{10} = 1024$，$9^3 = 729$ より成立

[II] $n = k$ のとき（$k \geqq 8$）

$2^{k+2} > (k+1)^3$ が成り立つと仮定．

$n = k+1$ のとき

$2^{k+3} = 2 \cdot 2^{k+2}$
$> 2(k+1)^3$　（仮定より）

$2(k+1)^3 - (k+2)^3$

$= k^3 - 6k - 6$
$= k(k^2 - 6) - 6$
$\geqq 8(8^2 - 6) - 6 > 0$　（$k \geqq 8$ より）

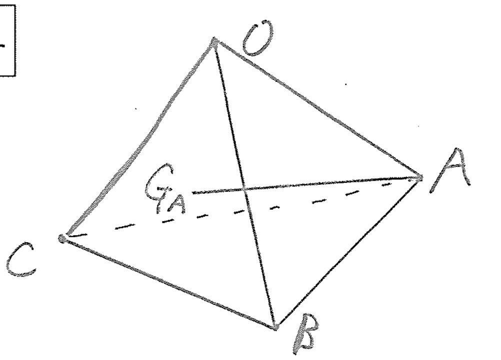
ゆえに，$2^{k+3} > (k+2)^3$ が成り立つ．

[I], [II] より (＊) が成り立つ．

以上から ①を満たす n は，

$n = 7$．

4



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおき，三角形 OBC, OCA OAB の重心をそれぞれ G_A, G_B, G_C とする．

$$\overrightarrow{OG_A}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

より，
$$\overrightarrow{AG_A}=\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OA}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{a}.$$

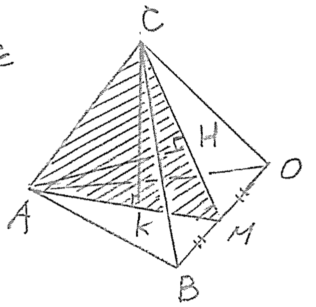
条件から，
$$\overrightarrow{AG_A}\perp(\text{平面}OBC)$$
なので，
$$\overrightarrow{AG_A}\cdot\vec{b}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{AG_A}\cdot\vec{c}=0.$$
よって，
$$\begin{cases}(\vec{b}+\vec{c}-3\vec{a})\cdot\vec{b}=0,\\(\vec{b}+\vec{c}-3\vec{a})\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$
より
$$\begin{cases}|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-3\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \cdots ①\\ \vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2-3\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \cdots ②\end{cases}$$

さらに，条件から，
$$\overrightarrow{BG_B}\perp(\text{平面}OCA),$$
$$\overrightarrow{CG_C}\perp(\text{平面}OAB)$$
であるから，同様にして，
$$\begin{cases}|\vec{c}|^2+\vec{c}\cdot\vec{a}-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0, \cdots ③\\ \vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \cdots ④\\ |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{c}\cdot\vec{a}=0, \cdots ⑤\\ \vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0. \cdots ⑥\end{cases}$$

① − ⑥ より，
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}.$$
② − ③ より，
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}.$$
よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ であるから，①, ②, ④ より，
$$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2\ (=2\vec{a}\cdot\vec{b}).$$
さらに，
$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2.$$
同様にして，
$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{b}|^2,\ |\overrightarrow{CA}|^2=|\vec{c}|^2.$$
以上より，
$$OA=OB=OC=AB=BC=CA$$
が成り立ち，四面体 OABC は正四面体である．

「証明終り」

4（別解）



辺OBの中点をMとし，頂点Aから対面OBCに下ろした垂線の足をH，頂点Cから対面OABに下ろした垂線の足をKとする．

与えられた条件から，Hは三角形OBCの重心であり，Kは三角形OABの重心なので，Hは線分CM上に，Kは線分AM上にある．

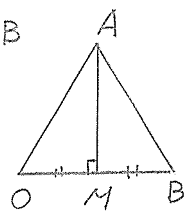
AH⊥(平面OBC)，CK⊥(平面OAB)から

$$\begin{cases} OB \perp AH, \\ OB \perp CK. \end{cases}$$

よって，OB⊥(平面MAC)となり，

$$OB \perp AM.$$

これと，Mが辺OBの中点であることから



$$AO = AB.$$

BとCを入れかえて同様の議論をすることにより

$$AO = AC.$$

よって，

$$AO = AB = AC. \quad \cdots ①$$

さらに，以上のAのところをB，Cとして同様の議論をすることにより

$$BO = BC = BA, \quad \cdots ②$$

$$CO = CA = CB \quad \cdots ③$$

を得る．

①，②，③より，

$$OA = OB = OC = AB = BC = CA$$

となり，四面体OABCは正四面体である．

「証明終り」

5

$f(x)=0$ は実数係数の3次方程式であり，条件(ロ)より，その3解は，

β，$\overline{\beta}$，γ　（βの虚部は正，γは実数）

とおける．条件(イ)より，

$\beta^3=\beta$ または $\beta^3=\overline{\beta}$ または $\beta^3=\gamma$

(i) $\beta^3=\beta$ のとき．

$\beta(\beta^2-1)=0$.

$\beta=0, \pm 1$.

βの虚部は正に反し不適

(ii) $\beta^3=\overline{\beta}$ のとき．

$\beta=A+Bi$（A, Bは実数，$B>0$）

とおくと，

$$A-Bi=(A+Bi)^3$$
$$=A^3-3AB^2+(3A^2B-B^3)i$$

A, Bは実数，$B>0$より，

$$\begin{cases} A=A^3-3AB^2, & \cdots① \\ 1=B^2-3A^2. & \cdots② \end{cases}$$

$A=0$ のとき①，②より，

$B^2=1$ つまり $B=1$．（$B>0$より）

$A\neq 0$ のとき，①より，

$1=A^2-3B^2$. …③

②×3＋③より，

$4=-8A^2$.

これを満たす実数Aは存在しない．

よって，

$\beta=i$，$\overline{\beta}=-i$.

条件(イ)より，$\gamma^3=\gamma$.

$\gamma=0, \pm 1$.

よって

$f(x)=(x-i)(x+i)x$，$(x-i)(x+i)(x-1)$，$(x-i)(x+i)(x+1)$.

これらは，条件(イ)(ロ)を満たす．

(iii) $\beta^3=\gamma$ のとき．

$\beta=A+Bi$（A, Bは実数，$B>0$）

とおくと，(ii)と同様に考えて，

$$\begin{cases} \gamma=A^3-3AB^2, \\ 0=3A^2-B^2. \end{cases}$$

これより，

$B=\pm\sqrt{3}A$，$\gamma=-8A^3$.

条件(イ)より，$\gamma^3=\gamma$ なので

$-8A^3=0, \pm 1$.

$B>0$ に注意すれば，

$(A, B, \gamma)=\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \mp 1\right)$（複号同順）

よって

$(\beta, \overline{\beta}, \gamma)=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, -1\right)$,

$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, 1\right)$.

よって，

$f(x)=\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)(x+1)$,

$\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)(x-1)$.

これらは，条件(イ)(ロ)を満たす．

以上より，求める3次式は，

x^3+x，$x^3\pm x^2+x\pm 1$（複号同順）

$x^3\pm 1$.