$\boxed{1}$ $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$.

(1) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において,

$$f_n'(\theta)=(-\sin\theta)\sin^{n-1}\theta+(1+\cos\theta)(n-1)\sin^{n-2}\theta\cdot\cos\theta$$
$$=\sin^{n-2}\theta\{-\sin^2\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\cos\theta\}$$
$$=\sin^{n-2}\theta\{n\cos^2\theta+(n-1)\cos\theta-1\}$$
$$=n\sin^{n-2}\theta(\cos\theta+1)\left(\cos\theta-\frac{1}{n}\right).$$

$n\geqq 2$ のとき, $\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{2}$ だから, この区間において, $\cos\theta=\frac{1}{n}$ となる θ がただ1つ存在する. この値を α とおくと, $\cos\alpha=\frac{1}{n}$ …① を満たす.

また, この区間において, $\sin^{n-2}\theta>0$, $\cos\theta+1>0$ より, $f_n(\theta)$ の増減は次表のとおり.

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$		$\nearrow$	極大かつ最大	$\searrow$	

$$M_n=f_n(\alpha)$$
$$=(1+\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)^{n-1}\quad(①より)$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

(2) (1)より,

$$(M_n)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

よって,

$$\lim_{n\to\infty}(M_n)^n=e\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{e}.$$

2

$p \geqq 2,\ q \geqq 2$ であるから，p, q の偶奇が一致するときは $p^q + q^p$ は 2 より大きい偶数であり，素数ではない。

ゆえに p, q の偶奇は異なり素数である偶数は 2 のみだから，p, q の一方は 2 である。

$p^q + q^p$ は p, q について対称であるから，$q = 2$，p は 3 以上の奇数としてよい。

$p = 3$ のとき

$p^2 + 2^p = 3^2 + 2^3 = 17$ であり，これは素数である。

$p \geqq 5$ のとき

$$\begin{aligned} p^2 + 2^p &\equiv p^2 + (-1)^p \pmod 3 \\ &\equiv p^2 - 1 \pmod 3 \end{aligned}$$

（p は奇数より）

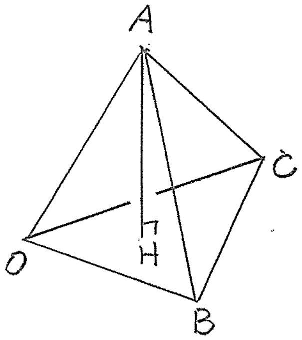
$$\begin{aligned} &\equiv (p+1)(p-1) \pmod 3 \\ &\equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

（p は 3 の倍数でないから，$p+1,\ p-1$ の一方は 3 の倍数である）

また，$p^2 + 2^p > 3$ であるから，$p^2 + 2^p$ は素数ではない。

したがって，求める素数は 17 である。

3

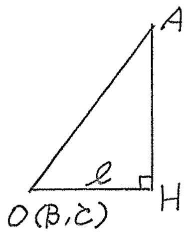


頂点Aから対面OBCに下ろした垂線の足をHとすると，与えられた条件からHは三角形OBCの外心であり，

$HO=HB=HC$ ($=l$ とする)

が成り立つ．

これと $AH\perp OH$，$AH\perp BH$，$AH\perp CH$（なぜなら，$AH\perp$(平面OBC)）から，三平方の定理により AO^2，AB^2，AC^2 はすべて AH^2+l^2 となり



$AO=AB=AC$ …①

が成り立つ．

以上のAのところをB，Cとして同様の議論をすることにより

$BO=BC=BA$ …②

$CO=CA=CB$ …③

も成り立つ．

①，②，③より

$OA=OB=OC=AB=BC=CA$.

したがって，四面体OABCは正四面体である．

「証明終り」

4

D: $y=z$, $|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$, $0 \leqq y \leqq \log a$

を平面 $y=t\ (0 \leqq t \leqq \log a)$ で切った断面は，平面 $y=t$ 上で，線分

$$z=t,\quad |x| \leqq \frac{e^t+e^{-t}}{2}-1$$

であり，これは，2点

$$P\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1,\ t,\ t\right),$$

$$Q\left(-\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right),\ t,\ t\right)$$

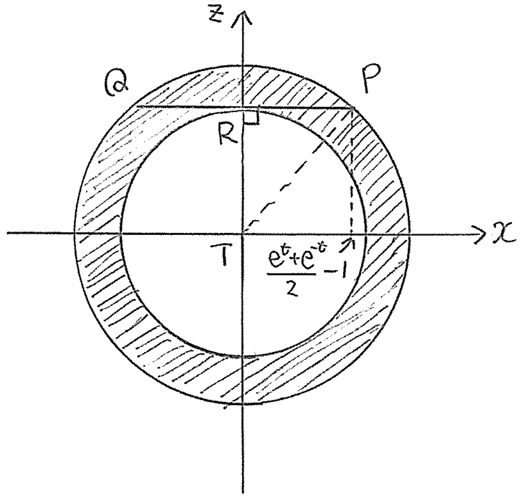
を結ぶ線分である。さらに，

$R(0,\ t,\ t)$, $T(0,\ t,\ 0)$

とすると，D を y 軸のまわりに一回転させてできる立体の平面 $y=t$ による断面は

中心 T，半径 TP および TR の 2つの円の間の部分

となり，その面積を $S(t)$ とすると，



$$S(t) = \pi(TP^2 - TR^2)$$
$$= \pi RP^2$$
$$= \pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2.$$

求める体積を V とすると

$$V = \int_0^{\log a} S(t)\,dt$$
$$= \int_0^{\log a} \pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-1\right)^2 dt$$
$$= \pi\int_0^{\log a}\left\{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{4}-(e^t+e^{-t})+\frac{3}{2}\right\}dt$$
$$= \pi\left[\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})-(e^t-e^{-t})+\frac{3}{2}t\right]_0^{\log a}$$
$$= \pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}\log a\right\}.$$

《注》 D の式において，

相加平均，相乗平均の関係により

$\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1 \geqq \sqrt{e^y e^{-y}}-1=0$ である。

5

n 秒後（n は 0 以上の整数）に，X の x 座標が 0, 1, 2 である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

このとき，n 秒後と $(n+1)$ 秒後の推移を考えて，漸化式を立てると，

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n, & \text{—①} \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n. & \text{—②} \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{l} a_n + b_n + c_n = 1 \quad \text{より，} \\ b_n = 1 - a_n - c_n \quad \text{—③} \quad \text{となる。} \end{array}\right)$

①－②より，

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$

$a_0 = 1$. $c_0 = 0$ より，

$$a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad \text{—④}$$

①＋②より，

$$\begin{aligned} &a_{n+1} + c_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{2}{3}b_n \\ &= -\frac{1}{6}(a_n + c_n) + \frac{2}{3}. \quad (\text{③より}) \end{aligned}$$

よって，

$$a_{n+1} + c_{n+1} - \frac{4}{7} = -\frac{1}{6}\left(a_n + c_n - \frac{4}{7}\right).$$

$$a_n + c_n - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

$$a_n + c_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^n. \quad \text{—⑤}$$

(④＋⑤)÷2 より，求める確率は，

$$a_n = \frac{2}{7} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{14}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

6

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ （α,βは複素数）

とおく．

$a=-(\alpha+\beta)$, $b=\alpha\beta$ であり，

α,βを入れかえても$f(x)$は同じであるから，以下，α,βを入れかえたものは省く．

$g(x)=f(x^3)=(x^3-\alpha)(x^3-\beta)$

が $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ で割り切れることから，

$$g(\alpha)=g(\beta)=0. \quad \cdots①$$

（$\alpha=\beta$の場合は，

$f(x)=(x-\alpha)^2$, $g(x)=(x^3-\alpha)^2$

であるから，①が成り立てば(イ)が成り立つ．）

よって，

$$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta)=(\beta^3-\alpha)(\beta^3-\beta)=0.$$

(i) $\alpha^3-\alpha=\beta^3-\beta=0$ の場合．

α,βはいずれも$0,\pm1$のいずれかであり，(ロ)に反する．

(ii) $\alpha^3-\alpha=\beta^3-\alpha=0$ の場合

$\alpha=0,\pm1$ であり，(ロ)より

$$(\alpha,\beta)=\left(1,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right),\left(-1,\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right).$$

$$(a,b)=\left(\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2},\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right),\left(\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2},\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}\right).$$

（それぞれ，複号同順）

(iii) $\alpha^3-\beta=\beta^3-\alpha=0$ の場合

$(\alpha\beta)^3=\alpha\beta$ より $\alpha\beta=0,\pm1$.

∘ $\alpha\beta=0$ なら $\alpha=\beta=0$.

∘ $\alpha\beta=1$ なら $\alpha^4=1$. $\alpha^2=\pm1$.

$(\alpha,\beta)=(\pm1,\pm1),(\pm i,\mp i)$.

（それぞれ複号同順）

∘ $\alpha\beta=-1$ なら $\alpha^4=-1$

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\begin{pmatrix} r>0, \\ 0\leqq\theta<2\pi \end{pmatrix}$

とおくと，

$$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=-1.$$

$r=1$, $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$.

$$\alpha=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2},\ \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}.$$

(α,β)は，入れかえた組を除くと

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2},\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2},\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right).$$

以上より，(ロ)を満たす(a,b)は

$$(a,b)=(-\sqrt{2}i,-1),(\sqrt{2}i,-1).$$

(i)〜(iii)より，

$$f(x)=x^2+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},$$

$$x^2+\frac{1\mp\sqrt{3}i}{2}x+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2},$$

（これらは複号同順）

$$x^2\mp\sqrt{2}ix-1.$$