第1問

命題Aについて ･･･ 偽である.

与えられた不等式は,

$$\frac{n^3}{26}+100-n^2 \geqq 0$$

と変形できるから, 変数 x の関数

$$f(x)=\frac{x^3}{26}+100-x^2=\frac{x^3}{26}-x^2+100 \quad (x>0)$$

を考えると, $f'(x)=\frac{3}{26}x^2-2x=\frac{3}{26}x\left(x-\frac{52}{3}\right)$ より, $f(x)$ の増減は以下のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$\frac{52}{3}=17.3\cdots$ であるから, n が正の整数全体を動くとき, $f(n)=\frac{n^3}{26}+100-n^2$ は $n=17$ または $n=18$ において最小となる.

$$f(17)=\frac{4913}{26}+100-289=-\frac{1}{26},$$
$$f(18)=\frac{5832}{26}+100-324=\frac{4}{13}$$

であるから, $f(n)$ の最小値は $-\frac{1}{26}$ となり, これは, 不等式

$$\frac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$$

が $n=17$ において成り立たないことを表す. ゆえに,

命題Aは偽であり, 反例は $n=17$ である.　　･･･(答)

命題Bについて ･･･ 真である.

$5n+5m+3\ell=1$ ならば, $3\ell=-5(n+m)+1$ であるから,

$$\begin{aligned}10nm+3m\ell+3n\ell &= 10nm+3\ell(n+m)\\ &= 10nm+\{-5(n+m)+1\}(n+m)\\ &= -5n^2+n-5m^2+m\\ &= -5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

一方, n,m が整数のとき,

$$\begin{cases}\left(n-\frac{1}{10}\right)^2 \geqq \frac{1}{100} & (\text{等号成立は } n=0 \text{ のとき})\\ \left(m-\frac{1}{10}\right)^2 \geqq \frac{1}{100} & (\text{等号成立は } m=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

第1問（つづき）

が成り立つので,

$$\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\left(m-\frac{1}{10}\right)^2 \geqq \frac{1}{100}+\frac{1}{100}.$$

$$-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10} \leqq 0.$$

よって,

$$10nm+3m\ell+3n\ell \leqq 0. \qquad \cdots ①$$

この不等式の等号が成り立つのは, $n=0$ かつ $m=0$ のときに限るが, 逆にこのとき,

$$5n+5m+3\ell=1, \quad \text{つまり}, \quad 3\ell=1$$

をみたす整数 ℓ は存在しないので, n, m, ℓ が整数でかつ $5n+5m+3\ell=1$ ならば, 不等式①が成り立ち, かつ等号は成立しない. すなわち,

$$10nm+3m\ell+3n\ell < 0.$$

したがって,

命題 B は真である.　　　$\cdots$(答)

第2問

P(u, v)とおく．（$|u| \leqq 1$）．

Pが条件(ii)をみたすとき，$v=-u$ かつ $-1 \leqq u \leqq 1$ …(ア)．

Pが条件(i)をみたすとき，A，B，Pを全て通る放物線Cの方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおく．($a \neq 0$)．CはA，Bを通るので，

$$\begin{cases} 1 = a-b+c \cdots ① \\ -1 = a+b+c \cdots ② \end{cases}$$

② − ① より $b=-1$，① + ② より $a+c=0$，これらの式は①かつ②と同値なので，Cの方程式を改めて

$$y=ax^2-x-a$$

とおく．

$$y=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-a-\frac{1}{4a}$$

Cの頂点の x 座標は $\dfrac{1}{2a}$ でこれの絶対値が1以上だから，$\left|\dfrac{1}{2a}\right| \geqq 1$，すなわち $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ ($a \neq 0$) …☆

PはC上だから

$$v=au^2-u-a$$

$$a(u^2-1)=u+v$$

$u=\pm 1$ のとき $u+v=0$ となり(ア)に含まれる．

$u \neq \pm 1$ のとき $u^2-1 \neq 0$，両辺を u^2-1 で割って

$$a=\frac{u+v}{u^2-1}$$ ($a \neq 0$ だから $u+v \neq 0$)，☆に代入し

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{u+v}{u^2-1} \leqq \frac{1}{2}.$$

第2問(続き)

$|u| \leqq 1$ という元の条件と，$u \neq \pm 1$ より $u^2-1<0$，負の数 u^2-1 を全ての辺に掛けて不等号の向きの変化に注意すると，

$$\frac{1}{2}(u^2-1) \leqq u+v \leqq \frac{1}{2}(1-u^2)$$

$$\frac{1}{2}u^2-u-\frac{1}{2} \leqq v \leqq -\frac{1}{2}u^2-u+\frac{1}{2}$$

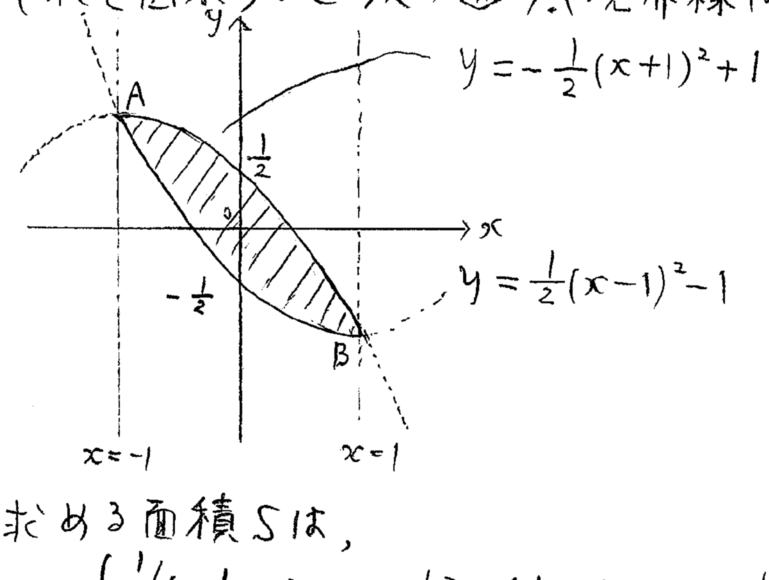
$$\frac{1}{2}(u-1)^2-1 \leqq v \leqq -\frac{1}{2}(u+1)^2+1$$

$(u \neq \pm 1,\ u+v \neq 0\ )$ ---(イ)

したがって条件(i)，(ii)をみたすPの存在範囲は(ア)，(イ)より

$$\frac{1}{2}(x-1)^2-1 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

それを図示すると次の通り。(境界線は含む。)



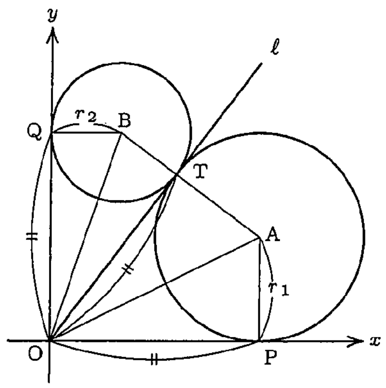
---(答)

求める面積 S は，

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x-1)(x+1)\,dx=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}\ \cdots(答)$$

第 3 問



C_1，C_2 の中心をそれぞれ A，B とし，

C_1 と x 軸の接点を P，

C_2 と y 軸の接点を Q，

C_1 と C_2 の接点を T

とおくと，$\mathrm{OP}=\mathrm{OT}=\mathrm{OQ}=1$ であるから，

$\mathrm{A}(1,\ r_1)$，　$\mathrm{B}(r_2,\ 1)$

とおけて，$\mathrm{AB}=r_1+r_2$ より，

$(r_2-1)^2+(1-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$.

これを整理すると，

$$r_1r_2+r_1+r_2-1=0.$$

さらに，r_2 について解くと，

$$r_2=\frac{1-r_1}{r_1+1}=\frac{2}{r_1+1}-1.$$

このとき，

$$8r_1+9r_2=8r_1+\frac{18}{r_1+1}-9=8(r_1+1)+\frac{18}{r_1+1}-17.$$

$r_1+1>0$ であるから，相加平均，相乗平均の大小関係より，

$$8r_1+9r_2 \geqq 2\sqrt{8(r_1+1)\cdot\frac{18}{r_1+1}}-17=7.$$

等号は，

$$8(r_1+1)=\frac{18}{r_1+1} \text{ かつ } r_1+1>0 \text{ より } r_1+1=\frac{3}{2}\text{，すなわち，} r_1=\frac{1}{2}$$

のときに成り立つ．このとき，$r_2=\dfrac{1}{3}$.

よって，$8r_1+9r_2$ の最小値は，

$$\mathbf{7}.\qquad\cdots(答)$$

また，$r_1=\dfrac{1}{2}$，$r_2=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ であり，T は線分 AB を $r_1:r_2=3:2$ に内分する点であるから，$\mathrm{T}\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ となる．よって，求める ℓ は直線 OT であるから，

$$\boldsymbol{\ell : y=\frac{4}{3}x}.\qquad\cdots(答)$$

第 4 問

(1)　n 回コインを投げた後には n 番目の文字は既に確定している.

表が出たときに文字列 AA を書くがその 1 番目の文字を A_1, 2 番目の文字を A_2 とする.

n 番目の文字が A_1 である確率を p_n, n 番目の文字が A_2 である確率を q_n, n 番目の文字が B である確率を r_n とする.

$$p_1 = r_1 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = 0.$$

n 番目の文字が A_1 のとき, $n+1$ 番目の文字は A_2 であり, n 番目の文字が A_2 または B のとき, $n+1$ 番目の文字は $\frac{1}{2}$ の確率で A_1 または B である.

$n+1$ 番目の文字が A_1 である確率と B である確率は等しく $\frac{1}{2}(q_n + r_n)$ であり, A_2 である確率は p_n である.

よって,

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}(q_n + r_n), \\ q_{n+1} = p_n, \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{2}(q_n + r_n). \end{cases}$$

$p_1 = r_1$ かつ漸化式から $p_n = r_n$. また, $q_n = p_{n-1}$ だから,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + p_{n-1}).$$

$p_2 = \frac{1}{2}(q_1 + r_1) = \frac{1}{4}$ で,

$$p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n = p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = \cdots = p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}.$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right).$$

よって,

$$p_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right).$$

$$p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$q_n = p_{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

第4問（つづき）

n 番目の文字が A である確率は

$$p_n + q_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \qquad \cdots(答)$$

(2) $n-1$ 番目の文字が A で n 番目の文字が B のとき, $n-1$ 番目の文字は A_2 である.

求める確率は,

$$\frac{1}{2}q_{n-1} = \frac{1}{2}p_{n-2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}. \qquad \cdots(答)$$