第１問

求める通過領域を，直線 $x=k$ で切ってみると，その切り口は，a が正の実数全体を動くときの

$$y=ak^2+\frac{1-4a^2}{4a}=(k^2-1)a+\frac{1}{4a}$$

の値域として得られる．$a>0$ において，

$$f(a)=(k^2-1)a+\frac{1}{4a}$$

とすると，

$$f'(a)=k^2-1-\frac{1}{4a^2}=\frac{(k^2-1)\cdot 4a^2-1}{4a^2}.$$

（i） $k^2-1\leqq 0$ のとき，

$f'(a)<0$ から $f(a)$ は単調減少である．

$$\lim_{a\to+0}f(a)=\infty,\ \lim_{a\to\infty}f(a)=\begin{cases}0 & (k^2-1=0)\\ -\infty & (k^2-1<0)\end{cases}$$

となることから，y の値域は，

$$\begin{cases}k=\pm1 \text{ のとき，} & 0<y\\ -1<k<1 \text{ のとき，} & y \text{ は任意の実数．}\end{cases}$$

（ii） $k^2-1>0$ のとき，

$$f'(a)=\frac{4(k^2-1)}{4a^2}\left(a-\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}\right)\left(a+\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}\right)$$

となることから，増減表は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$	(∞)	↘	極小	↗

$\displaystyle\lim_{a\to+0}f(a)=\infty,\ \lim_{a\to\infty}f(a)=\infty$ も合わせると，

y の値域は，

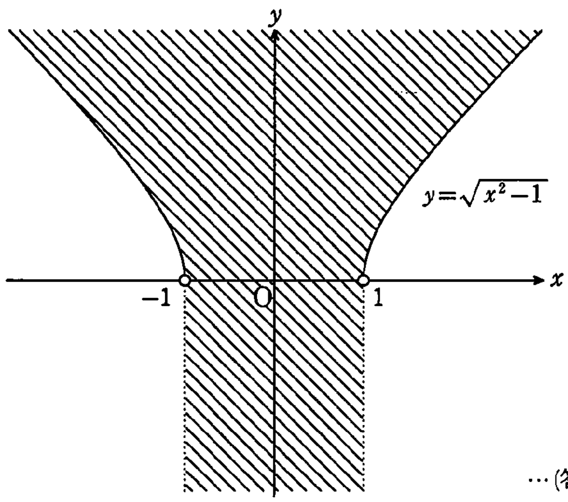
$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}\right)\leqq y \quad \text{つまり} \quad \sqrt{k^2-1}\leqq y.$$

以上（i），（ii）を合わせると C の通過する領域は，

$$\begin{cases}-1<x<1 \text{ のとき，} & y \text{ は任意の実数}\\ x=\pm1 \text{ のとき，} & 0<y\\ x<-1,\ 1<x \text{ のとき，} & y\geqq\sqrt{x^2-1}\end{cases}$$

となる．これを図示すると右図の斜線部分となる．

ただし，境界線は $y=\sqrt{x^2-1}$ $(y>0)$ のみ含む．



…（答）

注　曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ は双曲線 $x^2-y^2=1$ の $y\geqq0$ の部分．

第１問（別解）

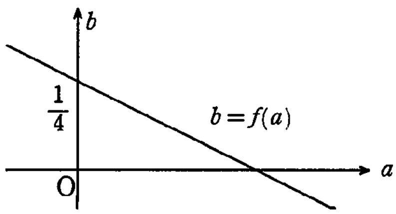
通過領域をDとすると，「(X,Y)がDの点である」とは，

「$Y=aX^2+\dfrac{1-4a^2}{4a}$，すなわち$(X^2-1)a^2-Ya+\dfrac{1}{4}=0$　…① をみたす正の実数aが存在する」　…(*)

ということである．

そこで，①の左辺を$f(a)$とおいて，$b=f(a)$のグラフを利用して考える．

$f(0)=\dfrac{1}{4}$　…②　である．

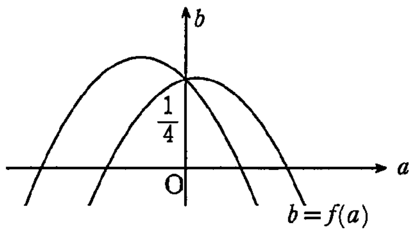


(ア)　$X=-1$ または 1 のとき，

$f(a)=-Ya+\dfrac{1}{4}$　であるから

②に注意すると，(*)が成り立つ条件は，$-Y<0$，

よって，$X=-1$ または 1 のとき，$Y>0$．



(イ)　$X^2-1<0$ のとき，

$b=f(a)$ は上に凸な放物線であるから，

②と $\lim_{a\to\infty}f(a)=-\infty$ に注意すると，Y

の値によらず(*)は成り立つ．

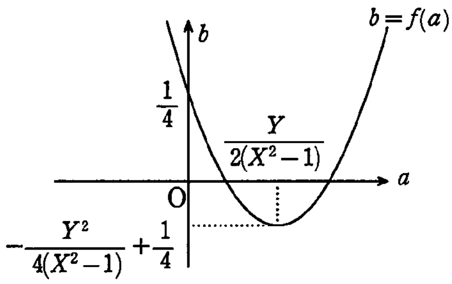
よって，$-1<X<1$ のとき，Yは任意．

(ウ)　$X^2-1>0$ のとき，

$b=f(a)$ は下に凸な放物線であり，

$$f(a)=(X^2-1)\left\{a-\frac{Y}{2(X^2-1)}\right\}^2-\frac{Y^2}{4(X^2-1)}+\frac{1}{4}$$

と変形できる．



よって，②に注意すると，(*)が成り立つ条件は，

$$\frac{Y}{2(X^2-1)}>0 \quad かつ \quad f\left(\frac{Y}{2(X^2-1)}\right)\leqq 0.$$

$X^2-1>0$ の下で，これは，

$$Y>0 \quad かつ \quad X^2-Y^2\leqq 1,$$

よって，$X<-1$，$1<X$ のとき，　$Y>0$　かつ　$X^2-Y^2\leqq 1$．

以上(ア)，(イ)，(ウ)合わせた全体がDの点(X,Y)のみたす条件で，これをxy平面に図示すると，

【解答】と同じ図が得られる．

第２問

(1) 正の整数 n に対して，n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n と表すことにする．

n を 1 以上の整数とする．p_{n+2} は，次の 2 つの確率の和である．

(a) 最初にさいころを投げたときに書かれる文字数が 2 文字であり，左から $n+2$ 文字目が A となる．

(b) 最初にさいころを投げたときに書かれる文字数が 1 文字であり，左から $n+2$ 文字目が A となる．

(a) は，最初の出目が 1, 2, 3 のどれかであり，最初を除く $n+1$ 回さいころを投げて付け加わる文字列の左から n 番目の文字が A となることと同値である．さいころを $n+1$ 回投げたときの n 番目の文字は，そのうち最初の n 回の出目のみから定まるため，$n+1$ 回さいころを投げてできる文字列の左から n 番目の文字が A となる確率は p_n に等しい．最初の出目が 1, 2, 3 のどれかである確率とあわせて，(a) の確率は $\frac{1}{2}p_n$ である．

(b) は，最初の出目が 4, 5, 6 のどれかであり，最初を除く $n+1$ 回さいころを投げてできる文字列の $n+1$ 番目の文字が A となることと同値である．よってこの確率は $\frac{1}{2}p_{n+1}$ である．

これらをあわせて，

$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n \qquad (n \geqq 1)$$

を得る．

p_1, p_2 を求めよう．p_1 は，1 回さいころを投げて 1, 2, 3 のどれかが出る確率 $\frac{1}{2}$ に等しい．p_2 は，2 回さいころを投げて 1 回目または 2 回目に 1, 2, 3 のどれかが出る確率に等しい．よって，2 回とも 4, 5, 6 が出る確率を 1 から引いて，$p_2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ となる．

漸化式

$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n \qquad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$p_1=\frac{1}{2},\ \ p_2=\frac{3}{4}$$

を解く．①より

$$p_{n+2}-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n),\qquad p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n$$

が成り立つ．よって

$$p_{n+1}-p_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_2-p_1)=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=p_2+\frac{1}{2}p_1=1$$

が成り立つので，

$$p_n=\frac{2}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \qquad \cdots\cdots (答)$$

第2問　(つづき)

であり，これが求める確率である．

(2)　2以上の整数 n に対して，n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がA, n 番目の文字がBとなる確率を q_n と表すことにする．

(1) と同様にして，

$$q_{n+2}=\frac{1}{2}q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n \qquad (n \geqq 2)$$

が成り立つことがわかる．

q_2, q_3 を求めよう．Aが書かれるときは必ず2文字続けて書かれるため，1文字目がA，2文字がBとなることはありえない．よって $q_2=0$ である．2文字目がA，3文字目がBとなるのは，1回目の出目が1,2,3のどれかであり，2回目の出目が4の場合である．よって $q_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ である．

漸化式

$$q_{n+2}=\frac{1}{2}q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n \qquad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ②$$

$$q_2=0,\quad q_3=\frac{1}{12}$$

を解く．②より

$$q_{n+2}-q_{n+1}=-\frac{1}{2}(q_{n+1}-q_n),\quad q_{n+2}+\frac{1}{2}q_{n+1}=q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n$$

が成り立つ．よって

$$q_{n+1}-q_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(q_3-q_2)=\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n=q_3+\frac{1}{2}q_2=\frac{1}{12}$$

が成り立つので，

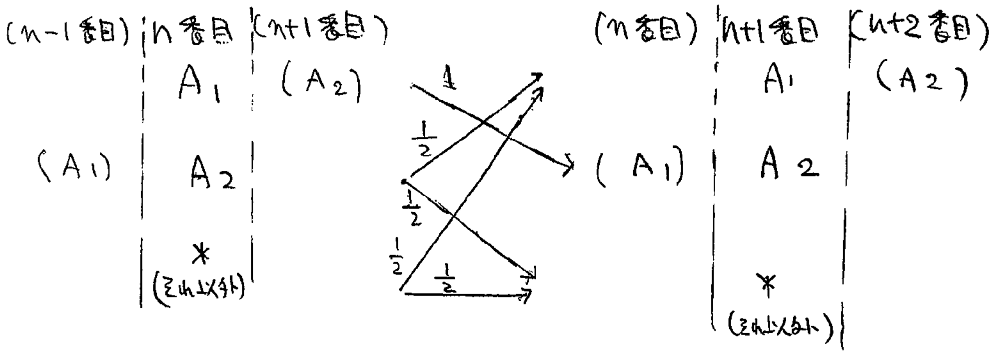
$$q_n=\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \qquad \cdots\cdots (答)$$

であり，これが求める確率である．

第2問（別解）

(1)　1, 2, 3 が出たときに書かれる AA を、
左を A_1、右を A_2 と区別して書くことにする。

左から n 番目が A_1 である確率を a_n,
左から n 番目が A_2 である確率を b_n.
左から n 番目がそれ以外である確率を c_n, とする。



より

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \end{cases}$$

$a_n + b_n + c_n = 1$ と①より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) = \frac{1}{2}(1 - a_n).$$

$a_1 = \frac{1}{2}$ のもとでこれを解くと $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

第２問（別解つづき）

よって，左から n 番目に A がある確率は（$n \geqq 2$ で）

$$
\begin{aligned}
a_n + b_n &= a_n + a_{n-1} \quad (\text{②より}) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，求める確率は，

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$n-2$, $n-1$, n 番目が　$A_1 A_2 B$　と記される場合なので，求める確率は（$n \geqq 3$ で）

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} \cdot \frac{1}{6} &= \frac{1}{6} \cdot a_{n-2} \quad (\text{②より}) \\
&= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} \\
&= \frac{1}{18}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}. \cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

これは $n=2$ の時も成り立つ．

第3問

(1)　$f(x)=ax^p-\log x$ とおく.

$$f'(x)=apx^{p-1}-\frac{1}{x}=\frac{apx^p-1}{x}$$

より $x>0$ での増減は次のようになる.

x	(0)	$\cdots$	$\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(∞)	$\searrow$		$\nearrow$

$\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} ax^p\left(1-\frac{\log x}{x^p}\right)=\infty$　$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty \text{より}\right)$.

$y=ax^p$ と $y=\log x$ の共有点が1点のみであるので,

$f(x)=0$ の $x>0$ での解が唯1つになる.

それは, 上記の増減より $f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=0$ の時である.

$$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=a\cdot\frac{1}{ap}-\frac{1}{p}\log\frac{1}{ap}=\frac{1}{p}\left(1-\log\frac{1}{ap}\right)=0$$

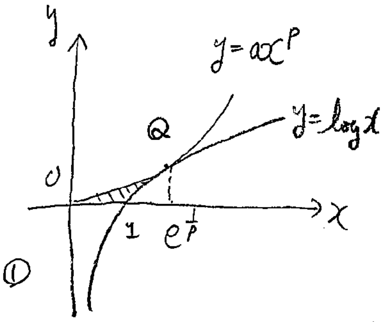
より　$a=\dfrac{1}{ep}$.　$\cdots$(答)

この時共有点の x 座標は　$\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}}$.

よって Q の x 座標は　$x=e^{\frac{1}{p}}$.　$\cdots$(答)

第3問（つづき）

(2)　(1)の計算から $0<x<e^{\frac{1}{p}}$ では
$ax^p>\log x$ なので，求める体積は
図の斜線部を x 軸の回りに回転した立体の
体積になるので，それを V とすると，



$$V=\pi\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}(ax^p)^2dx-\pi\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}(\log x)^2dx \quad \cdots ①$$

ここで，
$$\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}(ax^p)^2dx=a^2\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{p}}}=a^2\cdot\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1}=\frac{1}{e^2p^2}\cdot\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1}$$
$$=\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}.$$

$$\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}(\log x)^2dx=\left[x(\log x)^2\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}x\cdot\frac{2\log x}{x}dx$$
$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-2\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\log x\,dx$$
$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-\left\{2\left[x\log x\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}-2\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}x\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$
$$=e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p^2}-2e^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p}+2e^{\frac{1}{p}}-2.$$

よって①より
$$V=\pi\left(\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}-e^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p^2}+2e^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p}-2e^{\frac{1}{p}}+2\right)$$
$$=\pi\left(\frac{2(1-2p)}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+2\right).\quad\cdots（答）$$

(3)　(2)の結果より　$V=2\pi$ となる p は，$p=\frac{1}{2}$.　$\cdots$（答）

第3問　(つづき2)

㊟ (1)は次のようにも解ける．

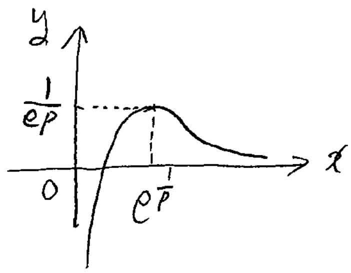
$ax^p=\log x \iff \dfrac{\log x}{x^p}=a$ となるので，まず $y=\dfrac{\log x}{x^p}$ を調べる．

$g(x)=\dfrac{\log x}{x^p}$ とおくと $g'(x)=\dfrac{1-p\log x}{x^{p+1}}$ より

x	(0)		$e^{\frac{1}{p}}$		(∞)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{ep}$	$\searrow$	0

$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0.\ \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty \text{ より}\right)$

よって，$y=g(x)$ のグラフは次のようになる．



$y=ax^p$ と $y=\log x$ が $x>0$ で共有点を1つ持つのは，

$ax^p=\log x$，つまり $g(x)=\dfrac{\log x}{x^p}=a$

が $x>0$ で唯1つ解をもつときなので，

$a=\dfrac{1}{ep}$．…(答)

この時，Qの x 座標は

$x=e^{\frac{1}{p}}$．…(答)

第４問

(1)　$a_n=\dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおけば，任意の自然数 n に対し，

$$a_{n+1}=\frac{p_{n+2}^2+p_{n+1}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\dfrac{(p_{n+1}^2+1)^2}{p_n^2}+p_{n+1}^2+1}{\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}=\frac{(p_{n+1}^2+1)^2+(p_{n+1}^2+1)p_n^2}{(p_{n+1}^2+1)p_{n+1}p_n}$$

$$=\frac{p_{n+1}^2+1+p_n^2}{p_{n+1}p_n}=a_n$$

よって $a_n=\dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}$ は n によらず一定となる．　(証明終り)

(2)　(1) より，任意の自然数 n に対し，

$$\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_2^2+p_1^2+1}{p_2p_1}=3$$

となる．与えられた漸化式 $p_{n+2}=\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}$ より $p_{n+1}^2+1=p_{n+2}p_n$ であるから，

$$3=\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n+2}p_n+p_n^2}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}.$$

よって $p_{n+2}+p_n=3p_{n+1}$．すなわち２以上の任意の自然数 n に対し

$$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n \qquad \cdots\cdots\ (答)$$

である．

(3)　主張を n に関する数学的帰納法で示す．

- $n=1$ のとき $p_1=1=q_1$ であり，$n=2$ のとき $p_2=2=q_3$ なので $n=1,2$ については成り立つ．
- $n\geqq 1$ として，$n, n+1$ での成立を仮定する．すなわち，$p_n=q_{2n-1}, p_{n+1}=q_{2n+1}$ と仮定する．(2) とこの仮定により，

$$p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n=3q_{2n+1}-q_{2n-1}$$

一方，

$$\begin{aligned}q_{2n+3}&=q_{2n+2}+q_{2n+1}=q_{2n+1}+q_{2n}+q_{2n+1}\\&=q_{2n+1}+(q_{2n+1}-q_{2n-1})+q_{2n+1}\\&=3q_{2n+1}-q_{2n-1}\end{aligned}$$

となるから，$p_{n+2}=q_{2n+3}$ である．すなわち $n+2$ のときも成立する．

よって帰納法より任意の自然数 n について $p_n=q_{2n-1}$ が示された．　(証明終り)

第５問

$$
\begin{aligned}
{}_{2015}\mathrm{C}_m &= \frac{2015\cdot 2014\cdot 2013\cdot\cdots\cdot(2016-k)\cdot\cdots\cdot(2016-m)}{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\cdots\cdot k\cdot\cdots\cdot 1}\\
&= \frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\frac{2013}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-k}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m} \qquad (\text{ただし，} 1\leqq m\leqq 2015)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$a_k = 2016-k,\quad b_k = k \qquad (1\leqq k\leqq m)$$

とおくと，

$${}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{a_3}{b_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_m}{b_m} \qquad (1\leqq m\leqq 2015)$$

となる．

今，m を $m = 1, 2, 3, \cdots, 2015$ と小さい方から順に変化させる．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は整数であるから，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ の分子 $a_1a_2\cdots a_m$ と分母 $b_1b_2\cdots b_m$ をそれぞれ素因数分解したときに，分子に表れる素因数２の個数が，分母に表れる素因数２の個数を超えたときに初めて ${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は偶数となる．

ここで，

$$N_a(k) = (a_k\text{ を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数}),$$
$$N_b(k) = (b_k\text{ を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数})$$

とおく．

$2016 = 2^5\times 63$ が２でちょうど５回割り切れることに注意する．$1\leqq k\leqq 31\ (=2^5-1)$ に対しては，k を素因数分解して現れる素因数２の個数は４以下であるから，

$$k = 2^{\ell} r \qquad (\text{ただし，} r\text{ は正の奇数，} \ell = 0, 1, 2, 3, 4)$$

と表すことができて，

$$
\begin{aligned}
a_k &= 2016-k\\
&= 2^5\cdot 3^2\cdot 7 - 2^{\ell} r\\
&= 2^{\ell}\left(2^{5-\ell}\cdot 3^2\cdot 7 - r\right)\\
&= 2^{\ell}\times(\text{奇数})
\end{aligned}
$$

である．これより

$$N_a(k) = N_b(k) = \ell \qquad (1\leqq k\leqq 31)$$

となり，

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_1a_2}{b_1b_2},\ \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3},\ \cdots,\ \frac{a_1a_2a_3\cdots a_{31}}{b_1b_2b_3\cdots b_{31}}$$

はすべて，分子に表れる素因数２の個数と，分母に表れる素因数２の個数が一致する．すなわち，

$${}_{2015}\mathrm{C}_1,\ {}_{2015}\mathrm{C}_2,\ {}_{2015}\mathrm{C}_3,\ \cdots,\ {}_{2015}\mathrm{C}_{31}$$

はすべて奇数である．

第5問　(つづき)

さらに，

$$a_{32} = 2016 - 32 = 1984 = 2^6 \cdot 31, \qquad b_{32} = 2^5$$

より，

$$N_a(32) = 6, \quad N_b(32) = 5 \quad \text{すなわち,} \quad N_a(32) > N_b(32).$$

よって，

$${}_{2015}\mathrm{C}_{32} \text{ は偶数である.}$$

以上より，${}_{2015}\mathrm{C}_m$　$(m = 1, 2, 3, \cdots, 2015)$ が偶数となる最小の m は，

$$m = 32 \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である.

【参考】

整数係数多項式 $f(x), g(x)$ に対し，$f(x) - g(x)$ の係数がすべて偶数であるとき，$f(x) \equiv g(x) \pmod 2$ と書くこととする．このとき，整数 $k \geqq 0$ に対して

$$(1+x)^{2^k} \equiv 1 + x^{2^k} \pmod 2$$

となることが帰納法で示される.

2015 を 2 進法で表すと $2015 = 11111011111_{(2)}$ であるから，

$$(1+x)^{2015} = (1+x)^{2^{10}}(1+x)^{2^9}(1+x)^{2^8}(1+x)^{2^7}(1+x)^{2^6}(1+x)^{2^4}(1+x)^{2^3}(1+x)^{2^2}(1+x)^2(1+x)$$
$$\equiv (1+x^{2^{10}})(1+x^{2^9})(1+x^{2^8})(1+x^{2^7})(1+x^{2^6})(1+x^{2^4})(1+x^{2^3})(1+x^{2^2})(1+x^2)(1+x)$$

${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が奇数となることは，$(1+x)^{2015}$ における x^m の係数が奇数であることと同値であり，上記の式よりこれは

$$(1+x^{2^{10}})(1+x^{2^9})(1+x^{2^8})(1+x^{2^7})(1+x^{2^6})(1+x^{2^4})(1+x^{2^3})(1+x^{2^2})(1+x^2)(1+x)$$

における x^m の係数が奇数であることと同値である．この多項式を展開すると，m が

$$m = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + a_4 \cdot 2^4 + a_6 \cdot 2^6 + a_7 \cdot 2^7 + a_8 \cdot 2^8 + a_9 \cdot 2^9 + a_{10} \cdot 2^{10} \quad (a_j = 0 \text{ または } 1)$$

(2^5 だけが抜けていることに注意) の形で書けるときに x^m の係数が 1，そうでないとき x^m の係数が 0 となる.

よって 2 進法で

$$m = (*****0*****)_{(2)} \quad (* \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

のときに ${}_{2015}C_m$ は奇数となり，

$$m = (*****1*****)_{(2)} \quad (* \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

のときに ${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は偶数となる。したがって，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m は

$$m = (100000)_{(2)} = 32$$

第 6 問

(1) $A_n = n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx$ とおく．$|x| > \dfrac{1}{n}$ において $g(nx) = 0$ であるから，

$$A_n = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx$$

である．$g(nx) \geqq 0$ であり，$-\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ において $p \leqq f(x) \leqq q$ であるから，

$$pn\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx \leqq A_n \leqq qn\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx$$

ここで，$nx = t$ と変数変換すると，

$$n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \left[\frac{\sin(\pi t)}{2\pi} + \frac{t}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$$

よって，$p \leqq A_n \leqq q$ である．すなわち，

$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

である．　　(証明終り)

(2) $I_n = n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log\left(1 + e^{x+1}\right)\,dx$ とおく．$-\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}$ のとき，$g'(x) = -\dfrac{\pi}{2}\sin \pi x = h(x)$ であるから

$$\{g(nx)\}' = ng'(nx) = nh(nx)$$

$|x| > \dfrac{1}{n}$ で $h(nx) = 0$ であることと，部分積分法により，

$$\begin{aligned} I_n &= n\left[g(nx)\log\left(1 + e^{x+1}\right)\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\left\{\log(1 + e^{x+1})\right\}'\,dx \\ &= n\left\{g(1)\log\left(1 + e^{\frac{1}{n}+1}\right) - g(-1)\log\left(1 + e^{-\frac{1}{n}+1}\right)\right\} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}}dx \end{aligned}$$

$g(1) = 0, g(-1) = 0$ と，$|x| > \dfrac{1}{n}$ で $g(nx) = 0$ であることから，次式を得る．

$$I_n = -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}}dx = -n\int_{-1}^{1} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}}dx.$$

$\dfrac{e^{x+1}}{1 + e^{x+1}} = 1 - \dfrac{1}{1 + e^{x+1}}$ は x の単調増加関数であるから，$-\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ における最大値，最小値はそれぞれ，$\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{\frac{1}{n}+1}}$，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{-\frac{1}{n}+1}}$ となる．

(1) の不等式を用いると，　$-\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{\frac{1}{n}+1}} \leqq I_n \leqq -\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1 + e^{-\frac{1}{n}+1}}.$

はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = -\frac{e}{1 + e}. \qquad \cdots\cdots (答)$$