1

$y=px+q$ …①,
$y=x^2-x$ …②,
$y=|x|+|x-1|+1$ …③.

x の 2 次方程式

$$x^2-x=px+q$$

すなわち

$$x^2-(p+1)x-q=0$$

の判別式を D とすると,直線①と②のグラフが交わるための条件は,

$$D=(p+1)^2+4q\geqq 0$$

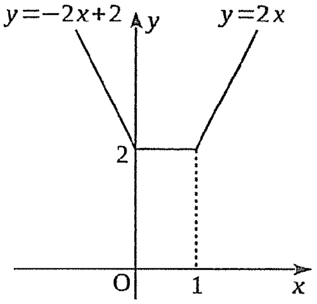
より

$$q\geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2 \quad \cdots ④.$$

$f(x)=|x|+|x-1|+1$ とする.

$x<0$ のとき, $f(x)=-2x+2$,
$0\leqq x<1$ のとき, $f(x)=2$,
$1\leqq x$ のとき, $f(x)=2x$

より,③のグラフは次のようになる.



よって,直線①が③のグラフと交わらないためには $-2\leqq p\leqq 2$ が必要であり, $g(x)=px+q$ とおくと,直線①が③のグラフと交わらないための条件は

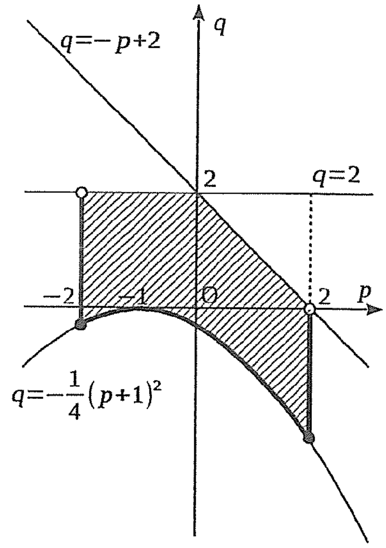
「 $-2\leqq p\leqq 0$ かつ $g(0)<2$ 」
または
「 $0\leqq p\leqq 2$ かつ $g(1)<2$ 」

すなわち

「 $-2\leqq p\leqq 0$ かつ $q<2$ 」
または
「 $0\leqq p\leqq 2$ かつ $q<-p+2$ 」

である.

ゆえに,点 (p,q) の範囲は,図の斜線部.ただし,境界は太線部分(白丸を除く)のみ含む.



求める面積は

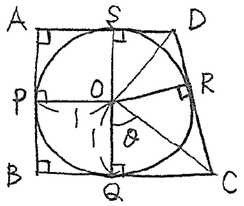
$$\int_{-2}^{2}\left\{2+\frac{1}{4}(p+1)^2\right\}dp-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$$
$$=\left[2p+\frac{1}{12}(p+1)^3\right]_{-2}^{2}-2$$
$$=\frac{25}{3}$$

である.

(注)　共有点をもつ場合はすべて交わると解釈した.

2

(ア) 90°の内角が隣り合うとき



図のように $\angle A=\angle B=90°$ である四角形ABCDを考え、四角形の4辺と円の接点を図のようにP, Q, R, Sとする。
条件(b)より，線分OC, ODはそれぞれ内角∠C, ∠Dを二等分し，

$\triangle OQC\equiv\triangle ORC$, $\triangle ORD\equiv\triangle OSD$

が成り立つ。
四角形ABCDの面積をSとすると，

$$S=2+2(\triangle OQC+\triangle ORD)$$
$$=2+2\left(\frac{1}{2}OQ\cdot CQ+\frac{1}{2}OR\cdot DR\right)$$
$$=2+CQ+DR \cdots ①$$

と表せる。
$\angle COQ=\theta\ (0°<\theta<90°)$ とおくと，
$\angle DOR=90°-\theta$,
$CQ=\tan\theta$,
$DR=\tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$
と表せて，$0°<\theta<90°$ のとき $\tan\theta>0$ より

$$CQ+DR=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq 2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=2$$

が成り立ち，等号は，

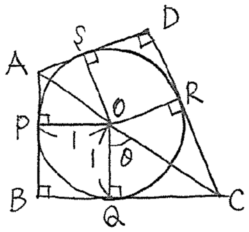
$$\tan\theta=\frac{1}{\tan\theta} \text{ かつ } \tan\theta>0$$

すなわち

$$\theta=45°$$

のとき成り立つ。
①より，
面積Sの最小値は4である。

(イ) 90°の内角が隣り合うことがないとき



図のように $\angle B=\angle D=90°$ である四角形ABCDを考え，四角形の4辺と円の接点を図のようにP, Q, R, Sとする。
条件(b)より線分OA, OCはそれぞれ内角∠A, ∠Cを二等分し，

$\triangle OSA\equiv\triangle OPA$, $\triangle OQC\equiv\triangle ORC$

が成り立つ。
四角形ABCDの面積をSとすると

$$S=2+2(\triangle OPA+\triangle OQC)$$
$$=2+2\left(\frac{1}{2}OP\cdot AP+\frac{1}{2}OQ\cdot CQ\right)$$
$$=2+AP+CQ$$

と表せる。
$\angle COQ=\theta\ (0°<\theta<90°)$ とおくと，
$\angle AOP=90°-\theta$,
$CQ=\tan\theta$, $AP=\dfrac{1}{\tan\theta}$
と表せるので，(ア)と同様にして，
面積Sは $\theta=45°$ のとき最小値4となるが，
$\theta=45°$ のときは $\angle C=90°$ となり，これは，
90°の内角が隣り合うことを表すので，適さない。

以上(ア)，(イ)より 面積の最小値は4である。

3

・$X=2$ について.

(ア) $A\to B\to E$ の経路が存在.
その確率は,
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$
(イ) $A\to F\to E$ の経路が存在.
その確率は,
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$
$X=2$ となるのは, (ア)または(イ)のときで, (ア)かつ(イ)となる場合に注意して,
$$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$=\frac{7}{16}.$$

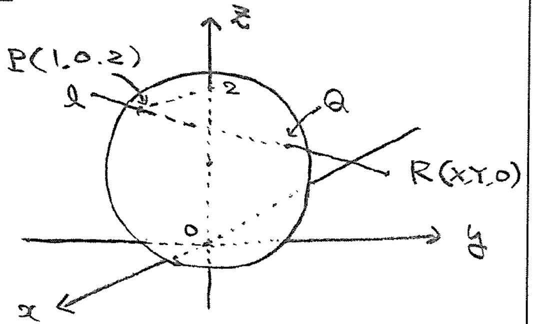
・$X=4$ について.

$X=4$ となる条件は, $A\to B\to C\to D\to E$ の経路が存在し, $B\to E$ および $A\to F\to E$ の経路が存在しないことである. よって,
$$P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{3}{128}.$$

・$X=0$ について.

X のとり得る値は,
$$X=0,\ 2,\ 4$$
であるから,
$$P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=4)$$
$$=1-\frac{7}{16}-\frac{3}{128}$$
$$=\frac{69}{128}.$$

$\boxed{4}$ $S : x^2+y^2+(z-1)^2=1$



点R(X,Y,0)とおく．

直線PR：$(x,y,z)=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PR}$ (tは実数)

すなわち

$(x,y,z)=(t(X-1)+1,\ tY,\ 2-2t)$．

直線PRは点(0,0,2)を通らないので

点Rの存在する領域は，球面Sと直線PRが共有点をもつ条件として求められる．すなわち，

$\{t(X-1)+1\}^2+(tY)^2+(1-2t)^2=1$

$\{(X-1)^2+Y^2+4\}t^2+2(X-3)t+1=0$ …①

を満たす実数tが存在するX，Yの条件である．その条件は，

$(X-1)^2+Y^2+4\neq0$ より

①の判別式 $\frac{D}{4}\geqq0$

すなわち

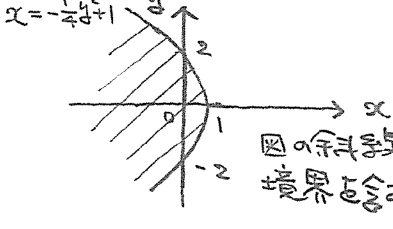
$(X-3)^2-\{(X-1)^2+Y^2+4\}\geqq0$

すなわち

$X\leqq-\frac{1}{4}Y^2+1$．

ゆえに，点Rの動く範囲は

xy平面上の領域 $x\leqq-\frac{1}{4}y^2+1$



図の斜線部．
境界を含む

$\boxed{5}$

2次式 $f(x)$ を1次式 $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$，余りを r とすると

$$f(x)=g(x)(px+q)+r$$

であり，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=px+q+\frac{r}{g(x)} \quad \cdots (*)$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ の係数はすべて正の有理数なので，p，q，r は有理数の定数である。

よって，

$$p=\frac{t}{s},\quad q=\frac{v}{u}$$

（s，t，u，v は整数で $s>0$，$u>0$）

とおける。このとき，$(*)$ の両辺に su をかけて，x に正の整数 n を代入すると

$$su\cdot\frac{f(n)}{g(n)}=tun+sv+\frac{sur}{g(n)}.$$

ここで，$\frac{f(n)}{g(n)}$ は整数で，s，t，u，v は整数なので，任意の正の整数 n に対して

$$\frac{sur}{g(n)}$$

は整数。

$g(n)=dn+e\ (d>0)$ であるから，十分大きな n をとれば

$$g(n)>|sur|$$

とできる。その n に対して

$$\left|\frac{sur}{g(n)}\right|<1.$$

よって，

$$\frac{sur}{g(n)}=0$$

となり，$s>0$，$u>0$ なので，

$$r=0.$$

したがって，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。